This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

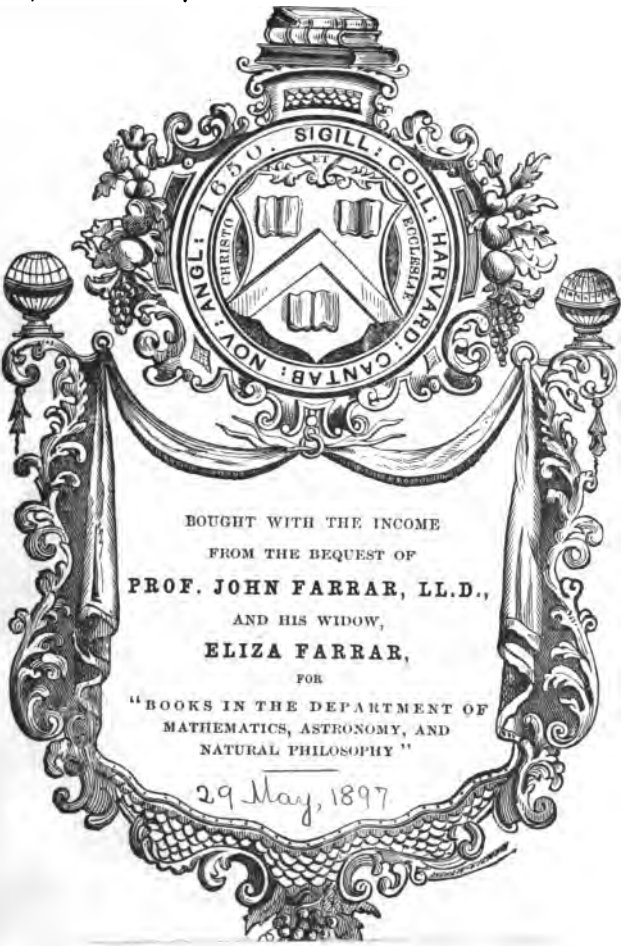
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 358.96



BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY"

29 May, 1897

SCIENCE CENTER LIBRARY

MANUEL

DU

BACCALAURÉAT

L'*Arithmétique,* l'*Algèbre* et la *Géométrie* ont été rédigées par M. ANTOMARI, ancien élève de l'École normale, agrégé des sciences mathématiques, docteur ès sciences, professeur au lycée Carnot ;

La *Cosmographie*, par M. MALUSKI, ancien élève de l'École normale, agrégé des sciences mathématiques, professeur au lycée de Lyon.

MANUEL

DU

BACCALAURÉAT

DE

L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE CLASSIQUE

(Première Partie)

(Classe de Rhétorique.)

MATHÉMATIQUES

PARIS

LIBRAIRIE NONY & Cie

17, RUE DES ÉCOLES, 17

1896

(Tous droits réservés

~~VI. 9352~~
Mall,
35S,1[illegible]
HARVARD COLLEGE
MAY 29 1897
LIBRARY.
Harrison fund.

ARITHMÉTIQUE

Numération décimale.

1. Objet de l'arithmétique. — L'arithmétique est la science des *nombres*, c'est-à-dire la science qui s'occupe de l'étude des propriétés des nombres.

2. Idée et formation des nombres entiers. — Nous verrons que l'on distingue plusieurs sortes de nombres, et nous nous occuperons d'abord des nombres *entiers*.

On a l'*idée d'un nombre entier* par la vue d'une collection d'objets de même espèce ou *unités*. Si, à une collection d'objets de même espèce, on ajoute un autre objet de la même espèce, c'est-à-dire une unité, on obtient une nouvelle collection donnant l'idée d'un nouveau nombre entier, et ainsi de suite. Il y a donc autant de nombres entiers que l'on veut, et on les obtient en ajoutant successivement et indéfiniment l'unité à elle-même : c'est ce que l'on exprime en disant que la suite des nombres entiers est *illimitée*.

3. Numération. — Puisque la suite des nombres entiers est illimitée, on a dû se préoccuper de les nommer et de les écrire tous aussi brièvement que possible : c'est le but de la *numération*.

La numération comprend deux parties : la numération *parlée* et la numération *écrite*.

4. Numération parlée. — La numération parlée apprend à nommer tous les nombres entiers à l'aide d'un petit nombre de mots.

Pour arriver à ce résultat, on a d'abord donné des noms : *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit*, *neuf*, *dix*, aux premiers nombres de la suite naturelle ; puis on a groupé les nombres en *ordres* et en *classes* d'unités.

Le nombre *un* a été appelé *unité simple* ou unité du *premier ordre*. Avec dix unités du premier ordre on a formé la *dizaine* ou unité du *deuxième ordre* ; avec dix dizaines on a

formé le nombre *cent*, c'est-à-dire la *centaine* ou unité du *troisième ordre*, et ainsi de suite indéfiniment. Bref, avec dix unités d'un certain ordre on a formé une unité de l'ordre immédiatement supérieur : de là le nom de *numération décimale*.

Entre deux dizaines consécutives il y a neuf nombres, que l'on nomme en faisant suivre le nom de la plus petite dizaine successivement des noms des neuf premiers nombres. Toutefois, l'usage veut que l'on dise

onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize,

au lieu de

dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six ;

de même l'usage veut que l'on dise

vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix,

au lieu de

deux dizaines, trois dizaines, quatre dizaines, cinq dizaines, six dizaines, sept dizaines, huit dizaines, neuf dizaines.

Entre deux centaines consécutives il y a quatre-vingt-dix-neuf nombres, que l'on nomme en faisant suivre le nom de la plus petite centaine successivement des noms des quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres, et ainsi de suite.

Les unités simples, les dizaines et les centaines sont des nombres de la *première classe* et constituent la *classe des unités simples*. Cette classe comprend tous les nombres depuis un jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf.

Avec dix centaines ou, si l'on veut, en ajoutant l'unité au nombre neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, on a formé le nombre *mille*. Le nombre mille, qui est une unité de quatrième ordre, a été pris comme unité principale de la *deuxième classe* ou classe des *mille*. Comme la classe des unités simples, la classe des mille comprend trois ordres d'unités : les unités de mille, les dizaines de mille et les centaines de mille. Avec mille unités de mille on forme alors une unité de *troisième classe*, le *million*, de même que l'on a formé une unité de deuxième classe avec mille unités simples, et ainsi de suite. Bref, avec mille unités d'une classe on forme l'unité de la classe immédiatement supérieure, et chaque classe d'unités comprend trois ordres.

Entre deux mille consécutifs, il y a neuf cent quatre-vingt-dix-neuf nombres que l'on nomme en faisant suivre le nom

du plus petit mille successivement des noms des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres.

De même entre deux millions consécutifs il y a neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf nombres, que l'on nomme en faisant suivre le nom du plus petit million successivement des noms des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres, et ainsi de suite.

5. Numération écrite. — La numération écrite apprend à écrire les nombres avec le moins de conventions possible.

Elle comprend deux problèmes : 1° Ecrire un nombre énoncé ; 2° Lire un nombre écrit.

1° *Écrire un nombre énoncé.* — On commence par représenter les neuf premiers nombres par des *caractères* ou *chiffres* ; ces chiffres sont :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Puis on adopte la convention suivante :

Dans tout nombre écrit les unités simples occupent le premier rang à droite, et tout chiffre placé à la gauche d'un autre représente des unités dix fois plus fortes, c'est-à-dire de l'ordre immédiatement supérieur.

En vertu de cette convention, et puisque les unités simples occupent le premier rang à droite, les dizaines occuperont le deuxième rang, les centaines le troisième, et ainsi de suite.

Si des unités d'un certain ordre manquent dans un nombre, on se sert, pour tenir la place de ces unités, d'un dixième caractère, 0, appelé *zéro*. On met ce caractère à la place de toute unité manquant dans un nombre de manière que tout chiffre représentant un certain ordre d'unités ait toujours la place qui lui est assignée en vertu de la convention précédente.

Ce dixième caractère n'a d'ailleurs aucune valeur par lui-même, et on l'appelle, pour cette raison, un chiffre *non significatif*, tandis que les autres chiffres s'appellent des chiffres *significatifs*.

La règle à suivre pour écrire un nombre énoncé résulte de ce que l'on vient de dire et peut être énoncée comme il suit :

Pour écrire un nombre énoncé, on écrit successivement de gauche à droite les chiffres qui expriment les unités des divers ordres, en commençant par l'ordre le plus élevé et en

mettant des zéros à la place des ordres d'unités qui manquent.

Par exemple, dans le nombre cinq mille trois cent quatre, il y a cinq mille, trois centaines, quatre unités; il n'y a pas de dizaines. On écrira donc le chiffre 5 au premier rang à gauche, le chiffre 3 au deuxième rang, le chiffre 0 au troisième rang, pour tenir la place des dizaines, et le chiffre 4 au quatrième rang. On obtient ainsi le nombre écrit 5.304.

2° *Lire un nombre écrit.* — La règle à suivre est la suivante :

On partage le nombre en tranches de trois chiffres à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir que deux chiffres et même un seul. On lit alors le nom de chaque tranche successivement, en commençant par la gauche, et en terminant par le nom de l'unité exprimée par le dernier chiffre de la tranche qu'on lit.

Par exemple, le nombre 53.472.624 se lira cinquante-trois *millions*, quatre cent soixante-douze *mille*, six cent vingt-quatre *unités*.

6. Remarque. — D'après la manière de lire un nombre écrit, on peut écrire autant de zéros que l'on veut à la gauche d'un nombre sans que ce nombre soit altéré. Mais il n'en est plus ainsi quand on écrit les zéros à la droite du nombre au lieu de les écrire à gauche.

Supposons, par exemple, que l'on écrive deux zéros à la droite d'un nombre ; on voit immédiatement que chaque chiffre représente, dans le nouveau nombre, des unités cent fois plus fortes que dans l'ancien. Chaque partie du nombre a donc été rendue cent fois plus forte, et, par suite, le nombre lui-même a été rendu cent fois plus fort.

7. Définitions. — On appelle *valeur absolue* d'un chiffre significatif le nombre compris entre un et neuf représenté par ce chiffre. Dans un nombre donné on appelle *valeur relative* d'un chiffre significatif la valeur qui lui est assignée par la convention fondamentale (5) et qui dépend du rang occupé par le chiffre dans ce nombre.

On dit qu'un nombre est plus *grand* ou plus *petit* qu'un autre quand il contient plus ou moins d'unités que cet autre. On indique qu'un nombre est plus grand qu'un autre au moyen du signe $>$, qu'on énonce *plus grand que*. On indique de même qu'un nombre est plus petit qu'un autre au moyen

du signe $<$, qu'on énonce *plus petit que*. Ainsi $12 > 7$ s'énonce 12 *plus grand que* 7; de même $7 < 12$ s'énonce 7 *plus petit que* 12. $12 > 7$ et $7 < 12$ s'appellent des *inégalités*. On indique que deux nombres sont égaux en les séparant par le signe $=$, qu'on énonce *égale*. On obtient ainsi une *égalité*.

Dans une égalité ou dans une inégalité, le nombre qui est à gauche du signe d'égalité ou d'inégalité s'appelle le *premier membre*, et le nombre qui est à droite s'appelle le *second membre*. Nous ferons usage quelquefois des deux signes $\geqq$, $\leqq$. Le premier s'énonce *supérieur ou égal*; le second s'énonce *inférieur ou égal*.

On appelle *preuve* d'une opération une autre opération destinée à vérifier l'exactitude de la première.

Addition des nombres entiers.

8. Définitions. — *Additionner* ou *ajouter* plusieurs nombres entiers donnés c'est trouver un autre nombre qui soit composé avec toutes les unités des nombres donnés. L'opération au moyen de laquelle on trouve ce nombre s'appelle l'*addition*, et le résultat de l'opération s'appelle la *somme* ou le *total* des nombres donnés.

Imaginons, par exemple, plusieurs tas de noix : chacun de ces tas correspond à un nombre entier. Réunissons-les en un seul, et nous obtenons un seul nombre entier, qu'on appelle la *somme* de tous les autres. En les réunissant en un seul, nous avons fait une *addition*.

9. Conséquences de la définition. — 1° Il est clair que pour former le tas unique nous pouvons prendre successivement les tas partiels dans un ordre quelconque : le tas unique comprendra toujours le même nombre de noix. 2° Il est clair aussi qu'avant de former le tas unique, nous pouvons partager chaque tas partiel en plusieurs autres, puis réunir tous ces nouveaux tas en un seul en les prenant successivement dans un ordre quelconque : le tas unique comprendra toujours le même nombre de noix.

10. Signe de l'addition. — Pour indiquer qu'on ajoute deux ou plusieurs nombres on les écrit les uns à la suite des autres en les séparant par le signe $+$, qu'on énonce *plus*. Par exemple, pour indiquer qu'on ajoute 5, 7, 9, 13, on écrit

$$5 + 7 + 9 + 13.$$

On obtient ainsi une *somme*, dont les nombres 5, 7, 9 et 13 constituent ce qu'on appelle les *termes*.

D'ailleurs quand on écrit $5 + 7 + 9 + 13$ on entend qu'il faut ajouter 7 à 5, puis 9 au résultat obtenu, puis 13 au nouveau résultat.

Mais de la première conséquence de la définition (9), il suit que l'on obtiendrait le même nombre si l'on faisait les opérations dans l'ordre indiqué par exemple par

$$9 + 7 + 5 + 13 :$$

c'est ce que l'on exprime en disant que *dans une somme on peut altérer à volonté l'ordre des termes sans changer la somme.*

D'après cela, il revient au même d'écrire $7 + 5$ ou $5 + 7$; il revient au même aussi d'écrire $5 + 7 + 9 + 13$ ou $7 + 9 + 5 + 13$, etc. On peut donc poser les égalités

$$7 + 5 = 5 + 7,$$
$$5 + 7 + 9 + 13 = 7 + 9 + 5 + 13, \text{ etc.}$$

11. Théorie de l'addition des nombres entiers. — Nous distinguerons deux cas :

Premier Cas. — *Ajouter un nombre d'un seul chiffre à un nombre quelconque.*

Soit par exemple à ajouter 8 à 54, c'est-à-dire à faire l'opération indiquée par $54 + 8$. En vertu de la deuxième conséquence de la définition (9), on peut supposer 8 décomposé en ses unités, et ajouter à 54 successivement toutes les unités de 8. Un peu d'habitude permet d'écrire immédiatement le résultat, 62.

Deuxième Cas. — *Ajouter plusieurs nombres quelconques.*

Soit par exemple à ajouter 3246, 428 et 356. En vertu de la deuxième conséquence de la définition (9), on peut supposer chacun de ces nombres décomposé en unités, dizaines, centaines, etc., puis ajouter entre elles les unités de même ordre, ce qui donne les unités, les dizaines, les centaines, etc. des résultats. Pour faciliter ces additions partielles, on écrit les nombres les uns au-dessous des autres de manière que les unités de même ordre soient placées sur la même ligne verticale, et on opère ainsi :

6 et 8 font 14; 14 et 6 font 20, c'est-à-dire 0 unité et 2 dizaines. On écrit alors le chiffre 0 des unités dans la colonne des unités, et l'on retient 2 que l'on ajoute aux dizaines en

disant : 4 et 2 de retenue font 6; 6 et 2 font 8; 8 et 5 font 13 dizaines, c'est-à-dire 3 dizaines et 1 centaine. On écrit alors le chiffre 3 dans la colonne des dizaines, et l'on retient 1 que l'on ajoute aux centaines en disant : 2 et 1 font 3; 3 et 4 font 7; 7 et 3 font 10, c'est-à-dire 0 centaine et 1 mille. On écrit donc 0 dans la colonne des centaines et l'on retient 1 que l'on ajoute aux mille en disant : 3 et 1 font 4.

La somme des trois nombres donnés est donc 4030.

On déduit de là la règle pratique suivante :

Règle. — *On écrit les nombres à ajouter les uns au-dessous des autres de manière que les unités de même ordre se correspondent, les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, etc. On ajoute les nombres placés sur la même colonne en commençant par la droite, c'est-à-dire par la colonne des unités. Si la somme ainsi obtenue est inférieure à 9 on l'écrit telle qu'on la trouve; si elle est supérieure à 9, on écrit le chiffre des unités de cette somme dans la colonne correspondante, et on retient les dizaines pour les ajouter à la colonne suivante. La somme provenant de la dernière colonne s'écrit telle qu'on la trouve.*

On dispose l'opération comme ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 3246 \\ 428 \\ 356 \\ \hline 4030 \end{array}$$

Soustraction des nombres entiers.

12. Définitions. — Étant donnés deux nombres entiers différents, la *soustraction* a pour objet de trouver un troisième nombre qui, ajouté au plus petit, reproduise le plus grand. On dit alors qu'on *retranche* le plus petit nombre du plus grand. Le résultat de l'opération s'appelle *reste, excès* ou *différence.*

Considérons par exemple 22 et 7. En ajoutant 1 à 7, puis 1 au résultat obtenu, et ainsi de suite, on forme successivement tous les nombres plus grands que 7; donc quand on aura ajouté un certain nombre d'unités on trouvera 22. Une unité de plus donnera 23, une autre unité de plus donnera 24, et ainsi de suite. *Il suit de là qu'il y a un nombre et un seul*

qui, ajouté à 7, *donne* 22, *et ceci est vrai, bien entendu, pour n'importe quel exemple.*

13. Signe de la soustraction. — Dans l'exemple actuel, le nombre qui, ajouté à 7, donne 22, est 15 ; de sorte que 15 est la *différence* entre 7 et 22. On indique cela en écrivant l'égalité

$$22 - 7 = 15,$$

que l'on énonce 22 *moins* 7 *égale* 15, et cela signifie, d'après la définition, que

$$22 = 7 + 15.$$

Sans écrire le résultat, pour indiquer que l'on retranche un nombre d'un autre plus grand que lui, on écrit le plus petit nombre à droite du plus grand, en les séparant par le signe —, que l'on énonce *moins.*

14. Conséquences. — 1° Par définition, si 15 est la différence entre 7 et 22, on a

$$22 = 7 + 15.$$

Il est clair que si à deux nombres égaux on ajoute un même nombre, on obtient des nombres égaux. Ajoutons par exemple 6 à 22 et à $7 + 15$, nous aurons

$$22 + 6 = 7 + 15 + 6.$$

Mais d'après ce qu'on a vu dans l'addition,

$$7 + 15 + 6 = 7 + 6 + 15.$$

Or, par définition,

$$7 + 6 + 15 = 13 + 15$$

et, d'autre part, $22 + 6 = 28.$

On aura donc $28 = 13 + 15,$

ce qui indique que 15 est aussi la différence entre 28 et 13. Ce résultat s'énonce d'une manière générale comme il suit :

La différence entre deux nombres ne change pas quand on ajoute le même nombre à tous les deux.

Comme l'on passe de $28 = 13 + 15$ à $22 = 7 + 15$ en retranchant 6 de 28 et de 13, on peut dire aussi que *la différence de deux nombres ne change pas quand on retranche le même nombre de chacun d'eux.*

2° On peut considérer le nombre 7 comme composé de plusieurs parties, 3 et 4, par exemple ; de sorte qu'on aura

$$22 = 3 + 4 + 15 ; \qquad (1)$$

mais $3 + 4 + 15 = 4 + 15 + 3$, et alors l'égalité (1) peut être considérée comme indiquant que $4 + 15$ ajouté à 3 donne 22, et par suite que $4 + 15$ est la différence entre

22 et 3. Cette différence $22 - 3$ est égale à 19, de sorte que

$$19 = 4 + 15,$$

ce qui indique que 15, différence entre 22 et 7, est aussi la différence entre 19 et 4. Or, nous venons d'obtenir 15 en retranchant d'abord 3 de 22, puis 4 du résultat obtenu 19. Ce résultat peut donc s'énoncer d'une manière générale comme il suit :

Pour retrancher un nombre d'un autre plus grand que lui, on peut retrancher du plus grand nombre successivement toutes les parties du plus petit.

15. Théorie de la soustraction. — Nous distinguerons deux cas :

Premier Cas. — *Retrancher un nombre d'un seul chiffre d'un nombre quelconque.*

Soit par exemple à retrancher 5 de 27. On retranche successivement de 27 toutes les unités de 5. Un peu d'habitude permet d'écrire immédiatement le résultat 22, en observant que $22 + 5 = 27$.

Deuxième Cas. — *Retrancher un nombre quelconque d'un autre nombre quelconque plus grand que lui.*

Soit à retrancher 472 de 3256, c'est-à-dire à *effectuer* l'opération 3256 — 472. Comme cela a été observé (14, 2°), on peut retrancher de 3256 successivement les unités, les dizaines et les centaines de 472. Pour faciliter ces opérations, écrivons le plus petit nombre au-dessous du plus grand de manière à placer les unités de même ordre sur la même ligne verticale. Puis retranchons 2 unités de 6 unités, ce qui donne 4 unités, que nous écrivons dans la colonne des unités. Si nous retranchons maintenant 7 dizaines de 5 dizaines, cela est impossible; mais nous ne changerons pas le résultat de la soustraction en ajoutant 10 dizaines au plus grand nombre et 1 centaine, c'est-à-dire 10 dizaines au plus petit (14, 1°). On a alors à retrancher 7 dizaines de 15 dizaines, ce qui donne 8 dizaines, que nous écrivons dans la colonne des dizaines. Comme l'on a ajouté une centaine au plus petit nombre, nous retrancherons maintenant non pas 4 centaines, mais 5 centaines des centaines du plus grand nombre. Or, il n'y a que 2 centaines dans le plus grand nombre, et, pour rendre la soustraction possible, nous ajouterons 10 centaines au plus grand nombre et 1 mille, c'est-à-dire 10 centaines au plus petit. Nous aurons donc à retrancher 5 centaines de 12

centaines, ce qui donnera 7 centaines que nous écrirons dans la colonne des centaines. Nous n'avions pas de mille dans le plus petit nombre, mais comme nous en avons ajouté 1 pour rendre possible la soustraction des centaines, il reste à retrancher 1 mille de 3 mille, ce qui donne 2 mille, que nous écrirons dans la colonne des mille. La différence cherchée est ainsi 2784.

D'après cela on a adopté la règle suivante :

Règle. — *On écrit le plus petit nombre au-dessous du plus grand de manière que les unités de même ordre se correspondent, les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, etc. On retranche chaque chiffre inférieur du chiffre supérieur correspondant en commençant par la droite. Si le chiffre inférieur est plus petit que le chiffre supérieur correspondant, on écrit sur la même colonne le résultat de leur soustraction. Dans le cas contraire, on retranche le chiffre inférieur du chiffre supérieur augmenté de* 10, *on écrit sur la même colonne le résultat de la soustraction, et on retient* 1 *que l'on ajoute au chiffre suivant* (*vers la gauche*) *du nombre inférieur.*

On dispose l'opération comme ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 3256 \\ 472 \\ \hline 2784 \end{array}$$

et l'on dit :

2 ôté de 6 reste 4 ; 7 ôté de 15 reste 8 : je pose 8 et je retiens 1 ; 1 et 4 font 5 ; 5 ôté de 12 reste 7 : je pose 7 et je retiens 1 ; 1 ôté de 3 reste 2. Le reste est 2784.

16. **Preuve.** — Pour faire la preuve de la soustraction, on ajoute le plus petit nombre et le reste : si l'opération est bien faite, et si l'on ne s'est pas trompé dans cette addition, on doit trouver le plus grand nombre.

Pour faire la preuve de l'addition on recommence l'opération dans un autre ordre.

Multiplication des nombres entiers.

17. **Définitions.** — La multiplication des nombres entiers est une opération qui a pour but de répéter un nombre entier appelé *multiplicande* autant de fois qu'il y a d'unités

dans un autre nombre entier appelé *multiplicateur* ; la multiplication n'est donc qu'une addition abrégée.

Le résultat de la multiplication s'appelle *produit* ; le multiplicande et le multiplicateur sont appelés les *facteurs* du produit.

On indique la multiplication en écrivant le multiplicateur à droite du multiplicande et en séparant par le signe $\times$, qu'on énonce *multiplié par* : ainsi 3×4 s'énonce 3 multiplié par 4.

Lorsque plusieurs nombres entiers sont donnés *dans un ordre déterminé*, on appelle *produit* de tous ces nombres ou *facteurs*, le nombre qu'on obtient en multipliant le premier par le second, le résultat obtenu par le troisième, et ainsi de suite. On indique cette suite de multiplications en écrivant tous ces nombres dans l'ordre donné sur la même ligne horizontale, et en séparant chaque nombre du suivant par le signe $\times$.

Ainsi $3 \times 5 \times 4 \times 6$ signifie qu'il faut multiplier 3 par 5, puis le résultat obtenu par 4, puis le nouveau résultat par 6. D'après cela, si on donnait les mêmes nombres dans l'ordre 5, 4, 6, 3 par exemple, au lieu de les donner dans l'ordre 3, 5, 4, 6, il n'est pas évident que le produit $5 \times 4 \times 6 \times 3$ soit égal au produit $3 \times 5 \times 4 \times 6$; cependant nous prouverons que ces deux produits sont bien égaux. (Voir les Théorèmes sur la multiplication, page 16.)

18. Conséquences. — 1° Considérons un produit de plusieurs facteurs, par exemple le produit

$$3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8.$$

Par définition, pour *effectuer* ce produit on doit multiplier 3 par 4, puis le résultat obtenu par 5, et ainsi de suite. Mais $3 \times 4 \times 5 = 60$; donc, pour terminer l'opération, il faudra multiplier 60 par 6, etc. Il en résulte que

$$3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 60 \times 6 \times 7 \times 8.$$

On énonce ce résultat en disant que *dans un produit de plusieurs facteurs on peut remplacer les deux premiers facteurs, ou les trois premiers facteurs, etc. par leur* **produit effectué.**

2° Inversement, on peut lire l'égalité précédente

$$60 \times 6 \times 7 \times 8 = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8,$$

et on voit alors que *si le premier facteur*, 60, *d'un produit*

est le produit effectué $3 \times 4 \times 5$, *on peut le remplacer par le produit* $3 \times 4 \times 5$ **non effectué.**

19. Théorème. — *Un produit de deux facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre de ces facteurs.*

Il s'agit, par exemple, de prouver que

$$3 \times 4 = 4 \times 3.$$

3×4 signifie 3 unités répétées 4 fois. Ecrivons donc 3 unités sur une ligne horizontale et répétons cette ligne 4 fois; nous formons ainsi le tableau

1 1 1
1 1 1
1 1 1
1 1 1

Il est clair que le nombre des unités contenues dans ce tableau est le même quelle que soit la manière de les compter. En les comptant par lignes horizontales, on voit qu'il y a 3 unités sur chaque ligne horizontale ; et comme il y a 4 lignes horizontales, le nombre total des unités est 3 répété 4 fois, c'est-à-dire 3×4.

En les comptant maintenant par lignes verticales, on voit qu'il y a 4 unités sur chaque ligne verticale ; et comme il y a 3 lignes verticales, le nombre total des unités est 4 répété 3 fois, c'est-à-dire 4×3. On a donc bien

$$3 \times 4 = 4 \times 3.$$

20. Corollaire. — *Pour multiplier un nombre par* 10, 100, 1000, ... *il suffit d'écrire* 1, 2, 3, ... *zéros à la droite de ce nombre.*

Je dis par exemple que $346 \times 1000 = 346000$.

En effet, $346 \times 1000 = 1000 \times 346$,

c'est-à-dire 346 fois 1000, c'est-à-dire enfin 346000.

21. Théorème. — *Un produit de trois facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des deux derniers facteurs.*

Je dis par exemple que

$$5 \times 4 \times 3 = 5 \times 3 \times 4.$$

Pour effectuer le premier produit, il faut répéter 4 fois 5, puis 3 fois le produit obtenu. Ecrivons donc 4 fois le chiffre 5 sur une ligne horizontale, puis répétons cette ligne 3 fois. Nous obtenons ainsi le tableau

5 5 5 5
5 5 5 5
5 5 5 5

qui, d'après la manière même dont il a été formé, contient un nombre total d'unités égal à $5 \times 4 \times 3$.

Mais on voit que sur chaque ligne verticale de ce tableau il y a 5 unités répétées 3 fois ; et comme il y a 4 lignes verticales, le nombre total des unités du tableau est aussi $5 \times 3 \times 4$. Comme ce nombre n'a pas changé avec la manière de l'obtenir, on a bien

$$5 \times 4 \times 3 = 5 \times 3 \times 4.$$

22. Corollaire. — *Pour multiplier un nombre par un chiffre significatif suivi de zéros, il suffit de le multiplier par ce chiffre significatif et d'ajouter à la droite du produit autant de zéros qu'il y en a à droite du chiffre significatif.*

Je dis par exemple que

$$637 \times 400 = 637 \times 4 \times 100.$$

En effet,

$$637 \times 400 = 400 \times 637.$$

Or, 400 étant égal à 4×100, on a vu (18, 2°) que $400 \times 637 = 4 \times 100 \times 637$. Intervertissant l'ordre des deux derniers facteurs, il vient

$$4 \times 100 \times 637 = 4 \times 637 \times 100.$$

Mais on a $4 \times 637 = 637 \times 4$;

donc $4 \times 637 \times 100 = 637 \times 4 \times 100$,

et par suite, en remontant la série des égalités, il vient finalement

$$637 \times 400 = 637 \times 4 \times 100.$$

23. Théorie de la multiplication. — Nous distinguerons trois cas :

Premier Cas. — *Multiplication de deux nombres d'un seul chiffre.*

On répète le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur. Pour faciliter cette opération on se sert de la table de *Pythagore*, qu'il faut savoir par cœur.

Pour former une table de Pythagore on écrit les 9 premiers nombres sur une ligne horizontale. On écrit au-dessous les 9 nombres obtenus en ajoutant à lui-même chacun des nombres de la première ligne, c'est-à-dire les produits des 9 premiers nombres par 2. Sur une troisième ligne horizontale, on écrit les nombres obtenus en ajoutant les nombres de la première ligne aux nombres correspondants de la deuxième : on obtient ainsi les produits des 9 premiers nombres par 3, car on a répété 3 fois chacun de ces nombres.

En ajoutant ensuite les nombres de la première ligne à ceux de la troisième, on obtient les nombres de la quatrième ligne, qui sont les produits respectifs des nombres de la première ligne par 4. On continue ainsi jusqu'à ce que l'on ait obtenu 9 lignes horizontales, ce qui conduit à écrire le tableau suivant :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

C'est ce tableau qu'on nomme la table de Pythagore, et sa seule inspection donne le produit de deux nombres d'un seul chiffre. Pour avoir, par exemple, le produit de 8 par 7, il suffit de prendre le nombre du tableau qui se trouve sur la septième ligne horizontale et sur la huitième ligne verticale : on a ainsi $8 \times 7 = 56$.

Deuxième cas. — ***Multiplication d'un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre.***

Soit, par exemple, à multiplier 426 par 7. Il faut répéter 426 sept fois, c'est-à-dire ajouter 7 nombres égaux à 426. Si l'on fait l'addition d'après la règle (11), on voit qu'il faut répéter 7 fois 6, c'est-à-dire multiplier 6 par 7, ce qui donne 42. On écrit donc 2 dans la colonne des unités et l'on retient 4 pour les ajouter aux dizaines. Si l'on ajoute maintenant les dizaines, on voit qu'il faut répéter 7 fois 2, c'est-à-dire multiplier 2 par 7, ce qui donne 14 ; 14 et 4 de retenue font 18 ;

on écrit donc 8 dans la colonne des dizaines et l'on retient 1 pour l'ajouter à la colonne des centaines, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait ajouté les chiffres de la dernière colonne, de droite à gauche.

On est ainsi conduit à la règle suivante :

RÈGLE. — *On écrit le multiplicateur au-dessous du multiplicande. On multiplie le premier chiffre à droite du multiplicande par le multiplicateur ; si le produit ne surpasse pas 9, on l'écrit tel qu'on le trouve ; s'il surpasse 9, on écrit le chiffre des unités, et l'on retient les dizaines pour les ajouter au produit suivant. On multiplie ensuite le deuxième chiffre à droite du multiplicande par le multiplicateur, et l'on ajoute la retenue ; si le résultat ainsi obtenu ne surpasse pas 9, on l'écrit tel qu'on le trouve et à la gauche du premier chiffre écrit ; s'il surpasse 9, on écrit le chiffre des unités de ce résultat à gauche du premier chiffre, et l'on retient les dizaines pour les ajouter au produit suivant, et ainsi de suite.*

On dispose l'opération comme ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 426 \\ 7 \\ \hline 2982 \end{array}$$

et l'on dit :

7 fois 6 font 42 : je pose 2 et je retiens 4 ; 7 fois 2 font 14 ; 14 et 4 de retenue font 18 : je pose 8 et je retiens 1 ; 7 fois 4 font 28 ; 28 et 1 de retenue font 29 : je pose 9 et j'avance 2.

Troisième cas. — *Multiplication de deux nombres quelconques.*

Soit à multiplier 327 par 426. Par définition, il faut répéter 426 fois 327, c'est-à-dire ajouter 426 nombres égaux à 327. Or, 426 se compose de 6 unités, 2 dizaines et 4 centaines. Donc pour répéter 426 fois 327, on peut le répéter d'abord 6 fois, puis 20 fois, puis 400 fois, et ajouter ensuite tous les résultats obtenus ; ce qui revient à multiplier 327 successivement par 6, par 20, par 400 et à ajouter ces divers produits.

Mais

$$327 \times 6 = 1962 ;$$

$$327 \times 20 = 327 \times 2 \times 10 = 6540$$

$$327 \times 400 = 327 \times 4 \times 100 = 130800.$$

Pour ajouter ces trois nombres nous formons le tableau

1962
6540
130800

139302 ,

et nous observons : 1° qu'il est inutile d'écrire le zéro qui est à la droite du second produit partiel, à la condition d'écrire le premier chiffre qui précède ce zéro dans la colonne des dizaines ; 2° qu'il est également inutile d'écrire les deux zéros qui terminent le troisième produit partiel, à la condition d'écrire le premier chiffre qui précède ces zéros dans la colonne des centaines, et ainsi de suite, s'il y avait d'autres produits partiels.

Cela conduit évidemment à la règle suivante :

Règle. — *On écrit le multiplicateur au-dessous du multiplicande de manière que les unités de même ordre se correspondent. On multiplie ensuite le multiplicande successivement par chaque chiffre du multiplicateur (2e cas), en ayant soin de placer le premier chiffre de chaque produit partiel au-dessous du chiffre du multiplicateur qui l'a fourni. Enfin, on ajoute les divers produits partiels ainsi obtenus.*

On dispose l'opération comme ci-dessous :

327
426

1962
654
1308

139302

24. Preuve. — Pour faire la preuve de la multiplication, on recommence l'opération en intervertissant l'ordre des deux facteurs. S'il n'y a pas erreur, les deux résultats doivent être identiques.

Théorèmes simples relatifs à la multiplication.

25. Théorème I. — *On ne change pas la valeur d'un produit de plusieurs facteurs en intervertissant d'une manière quelconque l'ordre des facteurs.*

La proposition a déjà été établie (19) pour un produit de deux facteurs. On a démontré aussi (21) que dans un produit

de trois facteurs on peut intervertir l'ordre des deux derniers facteurs sans changer le résultat.

Cela posé, pour démontrer le théorème énoncé, nous allons prouver d'abord que *dans un produit de plusieurs facteurs on peut intervertir l'ordre de deux facteurs consécutifs, sans changer le résultat.*

Considérons donc un produit de plusieurs facteurs, par exemple le produit.

$$7 \times 5 \times 4 \times 8 \times 9 \times 3 \times 6,$$

et prouvons que l'on peut intervertir l'ordre des deux facteurs 8 et 9, c'est-à-dire prouvons que l'on a

(1) $7 \times 5 \times 4 \times 9 \times 8 \times 3 \times 6 = 7 \times 5 \times 4 \times 8 \times 9 \times 3 \times 6.$

Observons pour cela que, pour effectuer l'un ou l'autre de ces deux produits, il faut commencer par multiplier 7 par 5 et le résultat obtenu par 4. Supposons alors ces multiplications effectuées et représentons par $(7 \times 5 \times 4)$ le résultat obtenu, *les parenthèses servant à indiquer que le produit est supposé effectué.* Puis, considérons le produit des *trois* facteurs $(7 \times 5 \times 4) \times 8 \times 9$. En intervertissant l'ordre des des deux derniers facteurs de ce produit on a (21)

$$(7 \times 5 \times 4) \times 8 \times 9 = (7 \times 5 \times 4) \times 9 \times 8.$$

Mais si deux nombres sont égaux, en les multipliant successivement par 3 et par 6, les produits obtenus sont évidemment égaux ; il en résulte

$$(7 \times 5 \times 4) \times 8 \times 9 \times 3 \times 6 = (7 \times 5 \times 4) \times 9 \times 8 \times 3 \times 6.$$

Rien n'empêche maintenant de supprimer les parenthèses ; car cela revient à remplacer un produit effectué par un produit non effectué (18, 2°). On a donc

$$7 \times 5 \times 4 \times 8 \times 9 \times 3 \times 6 = 7 \times 5 \times 4 \times 9 \times 8 \times 3 \times 6,$$

et il n'y a qu'à lire l'égalité en sens inverse pour retrouver l'égalité (1) que l'on s'était proposé d'établir.

Pour prouver maintenant que l'on peut intervertir à volonté l'ordre des facteurs d'un produit sans changer le produit, il suffit d'observer que, par des échanges successifs, on peut amener un facteur donné du produit à occuper le rang que l'on veut dans ce produit.

26. Corollaires. — 1° *Dans un produit de plusieurs facteurs on peut remplacer un groupe de facteurs du produit par leur produit effectué, sans changer le résultat.*

Car on peut écrire les facteurs dans un ordre tel que les

facteurs que l'on veut remplacer par leur produit effectué, soient consécutifs à partir du premier. Alors la proposition résulte de la définition même du produit de plusieurs facteurs (17).

2° *Pour multiplier un produit de plusieurs facteurs par un nombre, il suffit d'introduire ce nombre à n'importe quelle place parmi les facteurs du produit. — De même pour multiplier un nombre par un produit de plusieurs facteurs, il suffit d'introduire ce nombre à n'importe quelle place parmi les facteurs du produit.*

27. Théorème II. — *Pour multiplier une somme par un nombre, il suffit de multiplier chaque terme de la somme par ce nombre et d'ajouter les résultats obtenus.*

Pour indiquer que l'on multiplie une somme par un nombre, pour indiquer par exemple que l'on multplie $7+6+5$ par 3, on écrit $(7+6+5)\times 3$ ou $3\times(7+6+5)$. Pour démontrer le théorème sur cet exemple, il s'agira donc de prouver que l'on a

$$(7+6+5)\times 3 = 7\times 3+6\times 3+5\times 3.$$

Or ceci résulte évidemment de ce que, en faisant les opérations indiquées, on répète 3 fois chaque partie de la somme et, par suite, on répète 3 fois la somme elle-même.

28. Théorème III. — *Pour multiplier deux sommes entre elles, on peut multiplier chaque terme de la première successivement par chaque terme de la deuxième et ajouter les résultats obtenus.*

Pour indiquer que l'on doit multiplier deux sommes entre elles, on les met entre parenthèses, en les séparant par le signe $\times$.

Soit par exemple à multiplier $6+7+5$ par $3+8$. Il s'agit de prouver que l'on a

$$(6+7+5)\times(3+8)=6\times3+7\times3+5\times3+6\times8+7\times8+5\times8.$$

La somme $3+8$ effectuée est égale à 11, de sorte que

$$(6+7+5)\times(3+8) = (6+7+5)\times 11.$$

Or, en vertu du th. II,

$$(6+7+5)\times 11 = 6\times 11+7\times 11+5\times 11.$$

Mais, puisque $11 = 3+8$, on a

$$6\times 11 = 6\times(3+8) = (3+8)\times 6 = 6\times 3+6\times 8,$$
$$7\times 11 = 7\times(3+8) = (3+8)\times 7 = 7\times 3+7\times 8,$$
$$5\times 11 = 5\times(3+8) = (3+8)\times 5 = 5\times 3+5\times 8.$$

En faisant la somme, on a bien

$$(6+7+5)(3+8)=6\times3+7\times3+5\times3+6\times8+7\times8+5\times8.$$

29. Puissances d'un nombre. — On appelle puissance d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre. Quand le nombre des facteurs est égal à 2, on a la *deuxième puissance* ou le *carré* ; quand le nombre des facteurs est égal à 3, on a la *troisième puissance* ou le *cube*, et ainsi de suite ; 2, 3, ... s'appellent les *degrés* de la puissance.

Quand on effectue le produit de deux facteurs égaux à un nombre, on dit aussi qu'on *élève* ce nombre à la deuxième puissance ou au carré ; de même quand on effectue le produit de trois facteurs égaux à un nombre, on dit qu'on *élève* ce nombre à la troisième puissance ou au cube, et ainsi de suite.

On indique qu'un nombre est élevé à une puissance au moyen d'un petit chiffre égal au degré, et placé un peu à droite et au-dessus du nombre : ce chiffre s'appelle l'*exposant*. Ainsi 7^3 s'énonce 7 exposant 3, et signifie $7\times7\times7$.

30. Théorème IV. — *Le produit de plusieurs puissances d'un même nombre est une puissance de ce nombre ayant pour exposant la somme des exposants.*

Par exemple, $8^4\times8^3=8^{4+3}$. En effet,

$$8^4\times8^3=\underbrace{8\times8\times8\times8}_{4\text{ fois}}\times\underbrace{8\times8\times8}_{3\text{ fois}}=8^{4+3}.$$

31. Théorème V. — *On élève un produit de facteurs à une puissance en élevant chacun des facteurs du produit à cette puissance.*

Par exemple, $(3\times4\times5)^2=3^2\times4^2\times5^2$.

En effet, $(3\times4\times5)^2=3\times4\times5\times3\times4\times5$

ou, en groupant les facteurs 3, 4 et 5,

$$(3\times4\times5)^2=3^2\times4^2\times5^2.$$

32. Corollaire. — *Toute puissance d'une puissance d'un nombre est une puissance de ce nombre ayant pour exposant le produit des deux exposants.*

Par exemple, $(4^2)^3=4^{2\times3}$.

En effet, $(4^2)^3=4^2\times4^2\times4^2=4^{2+2+2}=4^{2\times3}$.

Division des nombres entiers.

33. Définitions. — Etant donnés deux nombres appelés respectivement *dividende* et *diviseur*, la division du dividende

par le diviseur est une opération qui a pour but de trouver combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Le nombre qui exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende s'appelle le *quotient à moins d'une unité*, ou tout simplement le *quotient*.

En particulier, si le diviseur est plus grand que le dividende, le quotient est zéro ; si le diviseur est égal au dividende, le quotient est 1 ; si le diviseur est inférieur au dividende, le quotient est supérieur ou égal à 1. Par exemple, le quotient de 9 par 7 est 1, parce que 9 ne contient 7 qu'une fois ; les quotients de 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 par 7 sont tous égaux à 2, parce que chacun de ces nombres ne contient 7 que 2 fois, etc.

Pour abréger le langage et l'écriture, on représente le dividende par une lettre, A, le diviseur par une lettre, B, et le quotient par une lettre, Q. On exprime alors que l'on divise A par B en séparant A et B par le signe :, que l'on énonce *divisé par*.

34. Conséquences de la définition. — Par définition le dividende contient le diviseur un nombre de fois égal au quotient, mais ne le contient pas un nombre de fois égal au quotient plus un. En d'autres termes, le produit du diviseur par le quotient est contenu dans le dividende, mais le produit du diviseur par le nombre obtenu en ajoutant l'unité au quotient n'y est pas contenu. C'est ce que l'on exprime au moyen des inégalités

$$B \times Q \leq A < B \times (Q + 1).$$

35. Définition du reste. — On appelle *reste* d'une division l'excès du dividende sur le produit du diviseur par le quotient. Le reste est évidemment inférieur au diviseur. En effet, on peut obtenir le quotient et le reste de la manière suivante : On retranche le diviseur du dividende, puis le diviseur du reste obtenu, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à un reste inférieur au diviseur. Ce reste est le reste de la division, et le quotient est le nombre des soustractions effectuées.

D'après cela, si Q est le quotient de la division de A par B, et si R est le reste, on a l'égalité

$$A = B \times Q + R,$$

et, en outre, R *est inférieur au diviseur* B.

Réciproquement, si quatre nombres, A, B, Q, R sont tels

que l'on ait

$$A = B \times Q + R$$

et que R soit inférieur à B, en divisant A par B, le quotient de la division est Q et le reste R.

En effet, en vertu de cette égalité A est la somme de $B \times Q$ et de R ; comme R peut être égal à 0, on a certainement

$$B \times Q \leq A. \qquad (1)$$

D'autre part, si, au lieu d'ajouter R à $B \times Q$, on ajoute B qui est supérieur à R, on augmente la somme ; de sorte que l'on a certainement aussi

$$A < B \times Q + R,$$

c'est-à-dire (27)

$$A < B \times (Q + 1). \qquad (2)$$

Les inégalités (1) et (2) montrent que A contient B un nombre de fois égal à Q, mais ne le contient pas un nombre de fois égal à $Q + 1$; donc Q est bien, par définition, le quotient de la division de A par B. D'ailleurs, R en est le reste, puisque l'égalité $A = B \times Q + R$ signifie alors que R est l'excès du dividende sur le produit du diviseur par le quotient.

36. Remarque I. — Lorsque le reste est égal à 0, le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, on peut dire que la *division est une opération qui a pour but de partager le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur : le nombre de ces parties s'appelle quotient*. Dans les mêmes conditions, on peut dire aussi que la *division a pour objet de trouver un nombre appelé quotient et qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende.*

37. Remarque II. — Il est clair que si l'on diminue le diviseur sans toucher au dividende, le quotient augmente ou ne change pas ; tandis que si l'on augmente le diviseur sans toucher au dividende, le quotient diminue ou ne change pas.

Par exemple, supposons que le dividende soit 14, et prenons successivement comme diviseurs 7, 6, 4 et 8 : le quotient obtenu est 2, pour 7 et pour 6 ; il est 3 pour 4, et 1 pour 8.

38. Déterminer *a priori* **le nombre des chiffres du quotient.** — Pour faire la théorie de la division, on examine plusieurs cas, suivant que le quotient a 1 ou plusieurs chiffres. Il importe donc de savoir trouver instantanément le nombre des chiffres du quotient.

Soit par exemple à trouver le nombre des chiffres du quotient de la division de 435267 par 741. Il est visible que le dividende est inférieur à 741×1000, tandis qu'il est supérieur à 741×100. Il en résulte que le dividende contient 100 fois le diviseur et ne le contient pas 1000 fois ; donc le quotient est supérieur ou égal à 100, mais certainement inférieur à 1000 ; donc il est compris entre 100 et 1000 et a 3 chiffres.

On raisonne d'une manière analogue dans tous les cas.

39. Théorie de la division. — Pour exposer la théorie de la division nous examinerons trois cas :

Premier cas. — *Le diviseur et le quotient n'ont qu'un seul chiffre.*

Soit, par exemple, à diviser 61 par 8. Le quotient est 7, parce que $8 \times 7 = 56$, tandis que $8 \times 8 = 64$. Le reste est 5, parce que $61 - 56 = 5$.

Deuxième cas. — *Le diviseur a plusieurs chiffres et le quotient n'en a qu'un.*

Nous nous appuierons sur le lemme suivant : *Pour diviser un nombre par un autre terminé par des zéros, on peut supprimer les zéros qui terminent le diviseur et autant de chiffres à la droite du dividende.*

Cela signifie, par exemple, que le quotient de la division de 4139 par 700 est le même que celui de 41 par 7.

En effet, soit 5 le quotient de la division de 41 par 7. On a, puisque 5 est ce quotient,

$$7 \times 5 \leq 41 < 7 \times 6 ;$$

donc, en multipliant tous ces nombres par 100,

$$700 \times 5 \leq 4100 < 700 \times 6.$$

On en conclut certainement

$$700 \times 5 < 4139 ;$$

mais 4100 et 700×6 étant composés tous deux de centaines, leur différence est au moins égale à 100 ; donc, en ajoutant 39 au plus petit, c'est-à-dire à 4100, on obtiendra un nombre inférieur au plus grand, c'est-à-dire à 700×6 ; car, pour passer de 4100 à 700×6, il faut ajouter au moins 100 au premier de ces deux nombres.

Il suit évidemment de là que l'on a

$$700 \times 5 \leq 4139 < 700 \times 6,$$

et, par suite, que le quotient de la division de 4139 par 700 est égal à 5, quotient de la division de 41 par 7.

Cela posé, soit à diviser 4139 par 741. On reconnaît tout de suite que le quotient n'a qu'un seul chiffre en raisonnant comme au n° 38. Si, au lieu de prendre 741 comme diviseur, nous prenons 700, le quotient ne change pas ou augmente (37). Or, nous venons de voir que ce quotient est le même que celui de 41 par 7 (division du 1er cas). Donc le quotient cherché est égal ou inférieur à 5. Pour trancher la question, il n'y a qu'à voir si le produit de 741 par 5 peut être retranché de 4139 : cette opération s'appelle l'*essai du chiffre* 5. Si elle est possible, 5 est le quotient cherché ; sinon, on essaie successivement 4, 3, etc., jusqu'à ce que l'on arrive à une opération possible. Le dernier chiffre essayé est le quotient demandé.

Dans l'exemple actuel le quotient est 5.

Règle. — *On suppose le diviseur réduit à son premier chiffre à gauche, et le dividende réduit aux unités de même ordre que celles qui sont exprimées par le premier chiffre à gauche du diviseur. On divise le dividende ainsi modifié par le premier chiffre à gauche du diviseur, ce qui donne le chiffre du quotient ou un chiffre trop fort. Pour faire l'essai de ce chiffre, on examine si l'on peut retrancher du dividende complet le produit du diviseur complet par ce chiffre. Si la soustraction est possible, le chiffre est bon ; sinon on le diminue d'une unité et l'on essaie de la même manière le nouveau chiffre obtenu, et ainsi de suite.*

Remarque. — On peut quelquefois diminuer le nombre des essais. Reprenons l'exemple précédent, et substituons 800 au diviseur 741. Le diviseur ayant été augmenté, le quotient n'a pas changé ou a diminué. Le quotient est le même que celui de la division de 41 par 8, c'est-à-dire encore 5, donc 5 est le quotient cherché.

Troisième cas. — *Le diviseur et le quotient ont plusieurs chiffres.*

Nous nous appuierons sur le lemme suivant : *Supposons, pour fixer les idées, que le quotient ait trois chiffres : pour avoir le chiffre des centaines du quotient, il suffit de diviser les centaines du dividende par le diviseur* (division du 2e cas).

Soit, par exemple, à diviser 413982 par 741. On reconnaît immédiatement (38) que le quotient a trois chiffres, et il s'agit de prouver que le chiffre des centaines s'obtient en

divisant les 4139 centaines du dividende par 741. Ce quotient est, comme nous l'avons vu, égal à 5 : il s'agit alors de prouver que le quotient contient 5 centaines mais n'en contient pas 6 ; en d'autres termes, que l'on a

$$741 \times 500 \leq 413982 < 741 \times 600.$$

Or, puisque 5 a été obtenu en divisant 4139 par 741, on a

$$741 \times 5 \leq 4139 < 741 \times 6.$$

En multipliant tous ces nombres par 100, on en déduit

$$741 \times 500 \leq 413900 < 741 \times 600.$$

On a donc *a fortiori*

$$741 \times 500 \leq 413982,$$

et, d'autre part, les nombres 413900 et 741×600 étant terminés par deux zéros diffèrent au moins par une centaine ; de sorte que si l'on ajoute $82 < 100$ au premier, on a encore

$$413982 < 741 \times 600,$$

puisque pour passer du premier au second de ces deux nombres il faut ajouter au moins 100 au premier et qu'on ne lui ajoute que 82.

On a donc bien

$$741 \times 500 \leq 413982 < 741 \times 600,$$

et 5 est le chiffre des centaines du quotient.

On verrait de la même manière que si le quotient a quatre chiffres, on obtient les milles du quotient en divisant les milles du dividende par le diviseur, et ainsi de suite.

Cela posé, proposons-nous de trouver le quotient de la division de 413982 par 741. Nous venons de voir que ce quotient a trois chiffres ; que l'on obtient le chiffre de ses centaines en divisant 4139 par 741 (division du 2e cas), et que ce chiffre des centaines est 5. Appelons P le nombre de deux chiffres formé par les dizaines et par les unités du quotient, de sorte que le quotient est égal à $500 + P$. Soit d'ailleurs R le reste de la division des deux nombres proposés. On a

$$413982 = 741 \times (500 + P) + R,$$

ou (27)

$$413982 = 741 \times 500 + 741 \times P + R.$$

Retranchons alors du dividende le produit du diviseur par 500 : cela revient à retrancher 741×5 de 4139 et à écrire 82 à la droite du résultat obtenu, ce qui donne 43482, et ce nombre, en vertu de l'égalité précédente, est égal à $741 \times P + R$. Ainsi, on a

$$43482 = 741 \times P + R,$$

et, en outre, R est inférieur à 741. Il en résulte que P est le quotient de la division de 43482 par 741.

On voit alors que l'on obtiendra le chiffre des dizaines de P en divisant les 4348 dizaines de 43482 par 741, et ainsi de suite. D'après cela, voici la règle pratique :

Règle. — *On sépare sur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il en faut pour contenir le diviseur une fois au moins et 9 fois au plus. On divise le nombre ainsi formé à gauche, ou premier dividende partiel, par le diviseur, ce qui donne le premier chiffre à gauche du quotient. On multiplie le diviseur par ce chiffre, et l'on retranche le produit du premier dividende partiel, ce qui donne le premier reste, à la droite duquel on abaisse le chiffre suivant du dividende. On obtient ainsi le second dividende partiel, que l'on divise par le diviseur, ce qui donne le deuxième reste, à la droite duquel on abaisse le chiffre suivant du dividende pour former le troisième dividende partiel, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait obtenu tous les chiffres du quotient. Le reste obtenu au moyen du dernier chiffre du quotient est le reste de la division.*

On dispose l'opération comme ci-dessous :

413982	741
3705	558
4348	
3705	
6432	
5928	
504	

Le quotient est 558, et le reste 504. Dans la pratique, on effectue simultanément la multiplication du diviseur par un chiffre du quotient, et la soustraction de ce produit du dividende partiel correspondant.

40. Preuve. — Pour faire la preuve de la division, on multiplie le diviseur par le quotient, et on ajoute le reste au produit : le résultat obtenu doit être égal au dividende.

41. Théorème. — *Pour diviser un produit de facteurs par un facteur de ce produit, il suffit de supprimer le facteur dans le produit.*

Par exemple, le quotient de la division de $3 \times 5 \times 4 \times 6$

par 4 est le produit $3 \times 5 \times 6$. En effet, si l'on change l'ordre des facteurs, on a

$$3 \times 5 \times 4 \times 6 = 4 \times (3 \times 5 \times 6) ;$$

ce qui exprime (35) qu'en divisant $3 \times 5 \times 4 \times 6$ par 4 on obtient $3 \times 5 \times 6$ comme quotient et 0 comme reste. La proposition est donc démontrée.

Caractères de divisibilité

par 2, 5, 4, 9 et 3.

42. Définitions. — On dit qu'un nombre est *divisible* par un autre quand la division du premier par le second donne pour reste zéro. Dans les mêmes conditions, on dit encore que le premier nombre est un *multiple* du second ou que le second est un *diviseur* ou un *sous-multiple* du premier.

Par exemple, 42 est divisible par 7, parce que si l'on divise 42 par 7 on a pour quotient 6 et pour reste 0 : 42 est un multiple de 7.

Il est clair qu'un nombre entier quelconque, 7 par exemple, a une infinité de multiples ; car tout nombre multiplié par 7 donne comme produit un multiple de 7 ; mais la réciproque n'est pas vraie : un nombre donné n'est pas le multiple d'une infinité d'autres nombres, c'est-à-dire n'admet pas une infinité de diviseurs.

Les *caractères de divisibilité* permettent de reconnaître si un nombre est divisible par un autre.

43. Théorème. — *Quand un nombre en divise plusieurs autres, il divise leur somme.*

Par exemple, 36, 27 et 15 étant divisibles par 3, la somme $36 + 27 + 15$ est également divisible par 3. Car chacun des nombres 36, 27 et 15 étant un nombre exact de fois 3, leur somme est un nombre exact de fois 3, c'est-à-dire est divisible par 3.

44. Remarque. — On démontre de la même manière que *si un nombre en divise deux autres, il divise leur différence.*

45. Corollaire I. — *Quand un nombre en divise un autre, il divise ses multiples.*

Par exemple, si 3 divise 15, il divise 6×15 ; car 6×15 est la somme de 6 nombres égaux à 15.

46. Corollaire II. — *Quand un nombre divise le dividende et le diviseur d'une division, il divise le reste de cette division.*

En effet, il divise le produit du diviseur par le quotient, parce que c'est un multiple du diviseur ; mais alors, comme il divise aussi le dividende, par hypothèse, il divise le reste, qui est la différence entre le dividende et le produit du diviseur par le quotient.

47. Théorème. — *Quand un nombre divise l'une des parties d'une somme de deux parties, le reste de la division de la somme par ce nombre est le même que celui qu'on obtient en divisant l'autre partie par le même nombre.*

Soit, par exemple, la somme $42 + 38$, dont la première partie, 42, est divisible par 7. On a

$$42 = 7 \times 6,$$
$$38 = 7 \times 5 + 3,$$

de sorte que 3 est le reste de la division de 38 par 7. Il en résulte que

$$42 + 38 = 7 \times 6 + 7 \times 5 + 3.$$

Mais $7 \times 6 + 7 \times 5 = 7 \times (6 + 5)$;

donc $42 + 38 = 7 \times (6 + 5) + 3$.

Comme 3 est inférieur à 7, puisque c'est le reste obtenu en divisant 38 par 7, cette égalité prouve que si l'on divise par 7 la somme $42 + 38$, le reste de la division est 3, c'est-à-dire le même que celui de la division de 38 par 7.

48. Caractère de divisibilité par 2 ou par 5. — *Le reste de la division d'un nombre par 2 ou par 5 est le même que celui de la division du chiffre de ses unités par 2 ou par 5.*

Soit, par exemple, 4657. On a évidemment

$$4657 = 4650 + 7.$$

Mais 4650 est un multiple de 10 ; or 2 et 5 divisent 10 ; donc ils divisent 4650. Il suit alors du théorème précédent que le reste de la division de 4657 par 2 ou par 5 est le même que celui de la division de 7 par 2 ou par 5 ; ce qui démontre la proposition.

49. Corollaires. — 1° *Pour qu'un nombre soit divisible par 2, il faut et il suffit qu'il soit terminé par 0 ou par un chiffre pair*, 2, 4, 6 *ou* 8.

2° *Pour qu'un nombre soit divisible par* 5, *il faut et il suffit qu'il soit terminé par* 0 *ou par* 5.

50. Caractère de divisibilité par 4. — *Le reste de la division d'un nombre par* 4 *est le même que celui de la division par* 4 *du nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite.*

Soit, par exemple, 3627. On a

$$3627 = 3600 + 27.$$

Mais 3600 étant un multiple de 100, est multiple de 4, puisque $100 = 25 \times 4$; donc 3600 est divisible par 4. Le théorème résulte alors du n° 47.

51. Corollaire. — *Pour qu'un nombre soit divisible par* 4, *il faut et il suffit que le nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite soit divisible par* 4.

52. Caractère de divisibilité par 9 ou par 3. — *Le reste de la division d'un nombre par* 9 *ou par* 3 *est le même que celui de la division par* 9 *ou par* 3 *de la somme des valeurs absolues de ses chiffres.*

La démonstration comprend plusieurs parties :

1° *Le nombre formé par l'unité suivie d'un ou de plusieurs zéros est un multiple de* 9 *plus* 1.

Par exemple, $100 = 99 + 1 =$ mult. (*) de $9 + 1$;

$1000 = 999 + 1 =$ mult. de $9 + 1$, etc.

2° *Tout nombre formé d'un chiffre significatif suivi d'un ou de plusieurs zéros est un multiple de* 9 *plus ce chiffre.*

En effet, on a par exemple

$$5000 = 5 \times 1000 = 5 \times (\text{mult. de } 9 + 1);$$

c'est-à-dire (27)

$$5000 = 5 \times \text{mult. de } 9 + 5 = \text{mult. de } 9 + 5.$$

3° *Un nombre quelconque est un multiple de* 9 *plus la somme des valeurs absolues des chiffres qui le composent.*

Soit, par exemple, 5327. On a :

$$\begin{aligned} 5000 &= \text{mult. de } 9 + 5, \\ 300 &= \text{mult. de } 9 + 3, \\ 20 &= \text{mult. de } 9 + 2, \\ 7 &= 7. \end{aligned}$$

Par suite, en faisant la somme et en observant qu'une somme de multiples de 9 est un multiple de 9, il vient

$$5327 = \text{mult. de } 9 + (5 + 3 + 2 + 7),$$

(*) Mult. est mis comme abréviation de *multiple*.

la parenthèse servant à indiquer que l'on suppose que la somme $5+3+2+7$ a été effectuée.

De cette égalité et du n° 47 résulte alors la proposition à démontrer pour 9; et comme 9 est un multiple de 3, la démonstration convient à 3.

53. Corollaire. — *Pour qu'un nombre soit divisible par* 9 *ou par* 3, *il faut et il suffit que la somme des valeurs absolues des chiffres qui le composent soit divisible par* 9 *ou par* 3.

Plus grand commun diviseur de deux ou de plusieurs nombres.

54. Définitions. — On appelle *diviseur commun* à deux ou à plusieurs nombres, tout nombre autre que 1 et qui les divise tous exactement. Le plus grand des diviseurs communs s'appelle le *plus grand commun diviseur* de ces nombres. Quand le plus grand commun diviseur est égal à 1, les nombres sont dits *premiers entre eux*.

La recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres repose sur le théorème suivant :

55. Théorème. — *Les diviseurs communs à deux nombres sont les mêmes que les diviseurs communs au plus petit et au reste de la division du plus grand par le plus petit.*

En d'autres termes, si l'on imagine formés : d'une part, le tableau des diviseurs communs aux deux nombres, d'autre part, le tableau des diviseurs communs au plus petit et au reste de la division du plus grand par le plus petit, ces deux tableaux sont identiques.

Pour le prouver, considérons par exemple les deux nombres 768 et 108. Le quotient de la division de 768 par 108 est 7 et le reste est 12, de sorte qu'on a

$$768 = 108 \times 7 + 12.$$

Cela posé, tout diviseur commun à 768 et à 108 divisant le reste de leur division (46), divise 12 et est, par suite, un diviseur commun à 108 et à 12; ce qui montre que tout nombre du premier tableau se trouve dans le second.

Réciproquement, tout diviseur commun à 108 et à 12 divise 108×7, qui est un multiple de 108; il divise donc la somme $108 \times 7 + 12$, c'est-à-dire 768; par suite, il est diviseur commun à 768 et à 108, ce qui montre que tout nombre du se-

cond tableau se trouve dans le premier et, par conséquent, en réunissant les deux parties du raisonnement, que les deux tableaux sont identiques.

56. Corollaire. — *Le plus grand commun diviseur de deux nombres est le même que le plus grand commun diviseur du plus petit et du reste de la division du plus grand par le plus petit.*

57. Trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres. — Soit à trouver le plus grand commun diviseur de 768 et de 324. Le plus grand commun diviseur étant le même que celui de 324 et du reste de la division de 768 par 324, nous sommes conduits à diviser 768 par 324. Si la division se fait exactement, comme 324 est lui-même son plus grand diviseur, il est le plus grand commun diviseur demandé. S'il y a un reste, le plus grand commun diviseur est le même que celui de 324 et du reste de la division de 324 par le premier reste obtenu (56). On est donc conduit à diviser 324 par le premier reste.

Si la division se fait exactement, c'est le premier reste qui est le plus grand commun diviseur cherché ; sinon, on est conduit à chercher le plus grand commun diviseur du premier reste et du second, par suite à diviser le premier reste par le second, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à un reste 0; ce qui arrivera certainement au bout d'un nombre limité d'opérations, puisque les restes diminuent quand on passe d'une opération à la suivante.

On conclut de là la règle suivante :

Règle. — *Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, on divise le plus grand par le plus petit, celui-ci par le premier reste, le premier reste par le second reste, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait obtenu un reste nul. Le dernier diviseur employé est le plus grand commun diviseur cherché.*

On dispose l'opération comme il suit :

	2	2	1	2	3
768	324	120	84	36	12
120	84	36	12	0	

Les quotients sont inscrits au-dessus des diviseurs correspon-

dants, et les restes au-dessous des dividendes correspondants.

Le plus grand commun diviseur obtenu entre 768 et 324 est 12.

58. Théorème. — *Tout nombre qui en divise deux autres divise leur plus grand commun diviseur.*

Tout nombre qui en divise deux autres divise en effet le reste de leur division (46). Si l'on se reporte alors à la suite des opérations qui donnent le plus grand commun diviseur, on voit que tout nombre qui en divise deux autres divise le plus petit et le premier reste ; il divise par suite le premier reste et le second reste ; il divise par suite le second reste et le troisième, et ainsi de suite jusqu'au plus grand commun diviseur qui est le dernier reste de la suite.

59. Corollaire. — *Les diviseurs communs à deux nombres sont les diviseurs du plus grand commun diviseur.*

En d'autres termes, si l'on forme : d'une part, le tableau des diviseurs communs à deux nombres ; d'autre part, le tableau des diviseurs de leur plus grand commun diviseur, ces deux tableaux sont identiques.

En effet, tout nombre du premier tableau se trouve dans le second, en vertu du théorème précédent.

Réciproquement, tout nombre du second tableau se trouve dans le premier, car tout nombre qui divise le plus grand commun diviseur divise les deux nombres proposés, qui sont des multiples de leur plus grand commun diviseur : il est donc un diviseur commun aux deux nombres, et par suite fait partie du premier tableau. Il suit bien de là que les deux tableaux sont identiques.

60. Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres. — Considérons par exemple trois nombres, A, B, C. Soit D le plus grand commun diviseur de A et de B ; soit de même D' le plus grand commun diviseur de D et de C. Nous allons montrer que D' est le plus grand commun diviseur cherché.

En effet, tout diviseur commun aux trois nombres divise D (59) ; par suite, il divise aussi D', qui est le plus grand commun diviseur de D et de C.

Réciproquement, tout diviseur de D' divise ses multiples D et C ; il divise par suite les multiples A et B de D.

Il suit de là que les diviseurs communs aux trois nombres

A', B, C sont les mêmes que les diviseurs de D' ; et il est clair alors que le plus grand commun diviseur de A, B, C n'est autre que le plus grand diviseur de D', c'est-à-dire que D' est le plus grand commun diviseur cherché. D'après cela, voici la règle à suivre :

RÈGLE. — *Pour trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, on cherche le plus grand commun diviseur du premier et du second, puis le plus grand commun diviseur du résultat obtenu et du troisième, et ainsi de suite jusqu'à ce que le dernier nombre ait été employé. Le dernier résultat obtenu est le plus grand commun diviseur cherché.*

61. Corollaire. — *Les diviseurs communs à plusieurs nombres sont les mêmes que les diviseurs de leur plus grand commun diviseur.*

Cette proposition est une conséquence immédiate du raisonnement qui a conduit à la règle précédente. On peut encore l'énoncer ainsi :

Tout nombre qui en divise plusieurs autres divise leur plus grand commun diviseur ; réciproquement, tout diviseur du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres divise ces nombres.

Théorèmes sur le plus grand commun diviseur.

62. Théorème. — *Quand on multiplie deux nombres par un troisième, leur plus grand commun diviseur est multiplié par ce troisième.*

Si l'on considère, par exemple, les deux nombres 768 et 324, et qu'on les multiplie par 7, le théorème énoncé signifie que si 12 est le plus grand commun diviseur de 768 et de 364, 12×7 est le plus grand commun diviseur de 768×7 et de 324×7.

Pour le démontrer, observons que si l'on divise 768 par 324, on a 2 pour quotient et 120 pour reste ; de sorte que l'on peut écrire l'égalité

$$768 = 324 \times 2 + 120.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par 7 : le premier membre devient 768×7, et le second (27)

$$324 \times 2 \times 7 + 120 \times 7 \text{ ou } 324 \times 7 \times 2 + 120 \times 7.$$

On peut donc écrire la nouvelle égalité

$$768 \times 7 = 324 \times 7 \times 2 + 120 \times 7.$$

Or, 120 étant plus petit que 324, puisque c'est le reste d'une division dont 324 est le diviseur, on voit que 120×7 est inférieur à 324×7. L'égalité précédente signifie alors que si l'on divise le produit 768×7 par le produit 324×7, le quotient est 2, et le reste est 120×7 ; ce que l'on énonce d'une manière générale ainsi qu'il suit :

Quand on multiplie le dividende et le diviseur d'une division par le même nombre, le quotient ne change pas, et le reste est multiplié par ce nombre.

Mais alors, si l'on se reporte aux opérations du plus grand commun diviseur, on voit que le diviseur et le premier reste ayant été multipliés par 7, le second reste sera aussi multiplié par 7 ; il en sera de même du troisième reste, et ainsi de suite jusqu'au dernier, c'est-à-dire jusqu'au plus grand commun diviseur.

63. Théorème. — *Quand on divise deux nombres par un troisième et que ces divisions se font sans reste, leur plus grand commun diviseur est divisé par ce troisième.*

On démontre d'abord que *si l'on divise deux nombres par un troisième, le quotient ne change pas, et le reste est divisé par ce troisième.*

Puis on achève le raisonnement comme dans le numéro précédent.

64. Corollaire I. — *Quand on multiplie ou que l'on divise plusieurs nombres par un autre, le plus grand commun diviseur est multiplié ou divisé par cet autre.*

Pour démontrer cette proposition, il n'y a qu'à se reporter à la règle pratique pour trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, et aux deux théorèmes précédents.

65. Corollaire II. — *Quand on divise deux ou plusieurs nombres par leur plus grand commun diviseur, les quotients obtenus sont premiers entre eux.*

En effet, le plus grand commun diviseur est alors divisé par lui-même, c'est-à-dire est devenu l'unité.

66. Théorème. — *Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un des facteurs divise l'autre.*

Soit, par exemple, $60 = 5 \times 12$. Je dis que si 3 divise 60 et est premier avec 5, il divise 12. En effet, 3 et 5 étant pre-

miers, leur plus grand commun diviseur est 1; donc le plus grand commun diviseur de 3×12 et de 5×12 est $1\times12=12$. Mais 3 divise son multiple 3×12; il divise 5×12, par hypothèse; donc il divise le plus grand commun diviseur 12 de 3×12 et de 5×12, ce qui démontre la proposition.

67. Théorème. — *Quand un nombre est divisible par plusieurs autres premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.*

Considérons, par exemple, le nombre 420, qui est évidemment divisible par 3, par 4 et par 5 qui sont premiers entre eux deux à deux. Nous allons prouver qu'il est divisible par le produit $3\times4\times5$.

Divisons en effet 420 par 3; le quotient étant 140, on a

$$420 = 3\times140.$$

Mais, par hypothèse, 4 divise le produit 3×140, et comme il est premier avec 3, il divise 140 (66). Le quotient étant 35, on a

$$140 = 4\times35,$$

et, par suite, $420 = 3\times4\times35$.

Enfin, 5 divisant 420, divise le produit 3×140: or il est premier avec 3, donc il divise 140, c'est-à-dire 4×35. Mais il est premier avec 4, donc il divise 35. Le quotient étant 7, on a $35 = 5\times7$, et, par suite,

$$420 = 3\times4\times5\times7,$$

ce qui montre que 420 est divisible par le produit $3\times4\times5$, puisqu'il est égal à ce produit multiplié par 7.

68. Application. — Ce théorème permet de trouver de nouveaux caractères de divisibilité au moyen de ceux qu'on a trouvés plus haut (49, 51, 53). C'est ainsi, par exemple, que pour reconnaître si un nombre est divisible par 12, il suffit de reconnaître s'il est divisible par 3 et par 4, parce que 3 et 4 sont premiers entre eux.

De même un nombre est divisible par 20 s'il est divisible par 4 et par 5, etc.

Plus petit multiple commun
de deux ou de plusieurs nombres.

69. Définitions. — On appelle *multiple commun* à plusieurs nombres tout nombre divisible séparément par chacun d'eux.

On appelle *plus petit multiple commun* de plusieurs nombres, le plus petit nombre divisible séparément par chacun d'eux.

Plusieurs nombres donnés ont une infinité de multiples communs, mais ils n'ont qu'un plus petit multiple commun.

70. Trouver le plus petit multiple commun de deux nombres. — Nous allons montrer que *le plus petit multiple commun de deux nombres s'obtient en divisant le produit de ces deux nombres par leur plus grand commun diviseur.*

Observons d'abord que si A et B sont deux nombres ayant pour plus grand commun diviseur D, et si l'on appelle A' et B' les quotients respectifs de ces deux nombres par leur plus grand commun diviseur, on a

$$A = A' \times D, \qquad B = B' \times D,$$

et

$$A \times B : D = A \times B' \quad (41).$$

Rappelons d'ailleurs que A' et B' sont premiers entre eux (65).

Cela posé, soit M un multiple commun de A et de B. Divisons-le par A et par B, et appelons A_1 et B_1 les quotients respectifs, de sorte que l'on a $M = A \times A_1 = B \times B_1$. Mais A et B étant divisibles par D, de l'égalité

$$A \times A_1 = B \times B_1$$

on déduit, en observant que $A = A' \times D$, $B = B' \times D$ et en divisant par D,

$$A' \times A_1 = B' \times B_1.$$

Cette nouvelle égalité signifie que le produit $A' \times A_1$ est divisible par B' ; or, B' étant premier avec A' divise alors A_1 (66). Faisons cette division, et soit Q le quotient obtenu ; on a

$$A_1 = B' \times Q,$$

et, par suite, l'égalité $M = A \times A_1$ peut s'écrire

$$M = A \times B' \times Q.$$

Elle montre alors que tout multiple commun, M, aux deux nombres A et B est divisible par le produit $A \times B'$, c'est-à-dire est un multiple de ce produit. Il en est forcément de même du plus petit multiple commun. Or, le plus petit multiple de $A \times B'$ est ce produit lui-même ; donc, le plus petit multiple commun des deux nombres est égal au produit $A \times B'$. Mais nous avons vu que le produit $A \times B'$ est

égal au quotient $A \times B : D$, et la règle énoncée plus haut se ainsi trouve justifiée.

D'ailleurs le raisonnement qui nous a conduit à la justification de la règle entraîne les conséquences suivantes :

71. Corollaires. — 1° *Le plus petit multiple commun de deux nombres est égal au produit de l'un d'eux par le quotient obtenu en divisant l'autre par leur plus grand commun diviseur.*

2° *Tout multiple commun à deux nombres* A *et* B *étant un multiple du produit* $A \times B'$, *est un multiple de leur plus petit multiple commun.*

72. Plus petit multiple commun de plusieurs nombres. — Voici la règle à suivre :

On cherche le plus petit multiple commun des deux premiers, puis le plus petit multiple commun du résultat obtenu et du troisième, puis le plus petit multiple commun du nouveau résultat et du quatrième, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les nombres aient été employés : le dernier résultat obtenu est le plus petit multiple commun cherché.

Pour établir cette règle, on prouve que tout multiple commun à tous les nombres donnés est un multiple du dernier résultat obtenu d'après la règle, et réciproquement.

Le raisonnement permet alors de conclure que *tout multiple commun à plusieurs nombres est un multiple de leur plus petit multiple commun.*

Notions sur les nombres premiers.

73. Définition. — On appelle *nombre premier* tout nombre qui n'est divisible que par lui-même ou par l'unité. Les nombres 3, 5, 7, 11 sont des nombres premiers.

74. Théorème. — *Tout nombre qui n'est pas premier admet au moins un diviseur premier.*

Soit A un nombre non premier. Par hypothèse, il admet des diviseurs autres que lui-même ou que l'unité : soit d le plus petit de ces diviseurs. Je dis que d est un nombre premier.

En effet, si d n'était pas premier, il admettrait un diviseur autre que lui-même ou que l'unité. Ce diviseur, *évidemment plus petit que* d, diviserait A qui est un multiple de d ; de

sorte que A admettrait un diviseur plus petit que d, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc d est un nombre premier, et la proposition est démontrée.

75. Théorème. — *La suite des nombres premiers est illimitée.*

Soient 1, 2, 3, 5, ..., n tous les nombres premiers, ou du moins les seuls nombres que l'on suppose être premiers. La proposition sera démontrée si l'on prouve que l'on peut trouver un nombre premier autre que l'un de ceux-là.

A cet effet, ajoutons l'unité au produit

$$1 \times 2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times n,$$

et soit A la somme ainsi obtenue, de sorte que, par définition, on a

$$A = 1 \times 2 \times 3 \times 5 \ldots \times n + 1.$$

Le nombre A est évidemment différent des nombres 1, 2, 3, ..., n. S'il est premier, le théorème est démontré. S'il n'est pas premier, il admet un diviseur premier (74), et il est facile de voir que ce diviseur premier, autre que l'unité, n'est pas l'un des nombres 1, 2, 3, 5, ..., n. Car s'il était l'un de ces nombres, il diviserait le produit $1 \times 2 \times 3 \times 5 \ldots \times n$, puisqu'il est l'un des facteurs de ce produit (41). Or il divise A par hypothèse, donc il diviserait 1, qui est la différence entre A et le produit $1 \times 2 \times 3 \times 5 \ldots \times n$. Ce résultat étant impossible, il faut bien admettre que le diviseur premier considéré n'est pas l'un des nombres 1, 2, 3, ..., n, et par suite qu'il existe des nombres premiers autres que ceux-là.

76. Construction d'une table de nombres premiers. — La suite des nombres premiers étant illimitée, on ne peut songer à construire une table qui les renferme tous; mais on peut se proposer de construire une table qui renferme tous les nombres premiers compris entre 1 et un nombre donné.

Soit, par exemple, à construire une table des nombres premiers de 1 à 100. Après avoir écrit le tableau des nombres de 1 à 100, on barre dans ce tableau tous les nombres de 2 en 2, à partir de 2 et non compris 2 : on barre ainsi tous les multiples de 2.

Après cela, on barre tous les nombres de 3 en 3, à partir de 3 et non compris 3, en tenant compte d'ailleurs des nombres déjà barrés pour compter les rangs : on barre ainsi tous les multiples de 3, et le premier nombre qui reste

n'étant ni multiple de 2, ni multiple de 3, est un nombre premier. Ce premier nombre étant 5, on barre tous les nombres de 5 en 5, à partir de 5 et non compris 5, en tenant toujours compte des nombres déjà barrés pour compter les rangs : on barre ainsi tous les multiples de 5, et le premier nombre non barré n'étant ni multiple de 2, ni multiple de 3, ni multiple de 5, est un nombre premier. Ce nombre étant 7, on barre tous les nombres de 7 en 7, et ainsi de suite.

Dans le cas actuel, l'opération est terminée quand on a barré de 7 en 7, *c'est-à-dire quand on est arrivé au plus grand nombre premier dont le carré est contenu dans la limite supérieure de la table.* Pour la table des nombres premiers de 1 à 100, quand on a barré les nombres de 7 en 7, il ne reste plus que des nombres premiers. Car le premier nombre qui reste est alors 11 ; or, on a supprimé 2×11 qui est un multiple de 2, 3×11 qui est un multiple de 3, et ainsi de suite jusqu'à 8×11, 9×11, 10×11, qui sont des multiples de 2 ou de 3. A partir de là les multiples suivants, 11×11, 11×12, etc., sont plus grands que 100, puisque 7 est le plus grand nombre premier dont le carré soit contenu dans 100.

77. Reconnaître si un nombre est premier. — La règle à suivre est la suivante :

On essaie la division du nombre proposé successivement par 2, *puis par* 3, *puis par* 5, *et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à un nombre premier dont le quotient soit plus petit que le nombre premier qui l'a fourni. Si aucune de ces divisions ne se fait sans reste, on peut en conclure que le nombre est premier.*

Par exemple on constate, en faisant les divisions, que 439 n'est divisible par aucun des nombres 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, et que le dernier de ces nombres donne un quotient, 19, plus petit que lui. Il en résulte que 439 est un nombre premier. En effet, s'il n'était pas premier, il aurait un diviseur premier, a, plus grand que 23, et la division de 429 par a se faisant sans reste, en appelant Q le quotient de cette division, on aurait

$$439 = a \times Q.$$

Mais quand on augmente le diviseur sans toucher au dividende, on sait que le quotient ne change pas ou diminue (37). Or, a est supérieur à 23 ; donc Q est inférieur ou

égal à 19. L'égalité précédente signifie alors que 439 est divisible par un nombre Q inférieur ou égal à 19 et est, par suite, divisible aussi par tout diviseur premier de Q. Mais les diviseurs premiers de Q sont tous inférieurs ou égaux à 19, et l'on a reconnu qu'aucun d'eux ne divise 439. Il y a évidemment contradiction entre les deux résultats, et, par suite, 439 n'est divisible par aucun nombre premier supérieur à 23; donc 439 est un nombre premier.

Propriétés élémentaires des nombres premiers.

78. Théorème. — *Tout nombre premier qui ne divise pas un nombre est premier avec lui.*

En effet, les deux nombres n'ont d'autre diviseur commun que l'unité.

79. Théorème. — *Tout nombre premier qui divise un produit de plusieurs facteurs divise au moins l'un des facteurs de ce produit.*

Supposons, par exemple, que 3 divise le produit $A \times B \times C$. S'il ne divise pas A, il est premier avec lui et, par suite, divise $B \times C$ (66). S'il ne divise pas B, il est premier avec lui et, par suite, divise C.

80. Corollaires. — 1° *Si un nombre premier divise une puissance d'un nombre, il divise ce nombre.*

2° *Si un nombre premier divise un produit de facteurs premiers, il est l'un des facteurs de ce produit.*

81. Théorème. — *Tout nombre qui n'est pas premier est un produit de facteurs premiers.*

Soit A un nombre qui n'est pas premier, et soit a son plus petit diviseur qui est un nombre premier (74). Divisons A par a et soit q le quotient, de sorte que

$$A = a \times q.$$

Si q est premier, le théorème est démontré. Si q n'est pas premier, en appelant b son plus petit diviseur qui est un nombre premier et q' le quotient de la division de q par b, on a

$$q = b \times q',$$

et, par suite, $$A = a \times b \times q'.$$

Si q' est premier, le théorème est démontré. Si q' n'est pas premier, on peut recommencer le raisonnement fait sur q,

et ainsi de suite. Comme les quotients successifs q, q',... vont en diminuant, on arrivera finalement à un nombre premier, et alors A sera mis sous la forme d'un produit de facteurs premiers. D'ailleurs, comme b n'est pas nécessairement distinct de a, le même facteur premier pourra figurer plusieurs fois dans le produit.

82. Définition. — *Décomposer un nombre en facteurs premiers,* c'est l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs premiers.

83. Théorème. — *Un nombre ne peut être décomposé que d'une seule manière en facteurs premiers.*

Supposons qu'un nombre A puisse être décomposé de deux manières en facteurs premiers, et soient

$$A = a \times b \times c,$$
$$A = a' \times b' \times c' \times d',$$

de sorte que $a \times b \times c = a' \times b' \times c' \times d'$. En vertu de cette égalité, le nombre premier a divise le produit de facteurs premiers $a' \times b' \times c' \times d'$; donc a est égal à l'un des facteurs de ce produit (80, 2°). S'il est égal à a', en divisant les deux produits par a, on a la nouvelle égalité

$$b \times c = b' \times c' \times d'.$$

De cette égalité on déduit que b est égal à b', puis que $c = c' \times d'$. De cette nouvelle égalité on déduit $c = c'$, et, en divisant les deux nombres par c, que $d' = 1$. De sorte que la deuxième décomposition est identique à la première.

84. Décomposition d'un nombre en facteurs premiers. — Comme le résultat est toujours le même quelle que soit la manière de procéder, on peut adopter la règle suivante :

On essaie la division du nombre considéré par les nombres premiers successifs 2, 3, 5, ... *jusqu'à ce que l'on en trouve un qui conduise à un reste nul. On essaie ensuite la division du quotient par les nombres premiers successifs, à partir de celui qui l'a fourni et y compris ce nombre, jusqu'à ce qu'on arrive à un autre reste nul. On continue ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à un quotient qui soit un nombre premier.*

On dispose l'opération comme dans l'exemple suivant :

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5

Les diviseurs successifs sont écrits à droite, les quotients à gauche, et l'on a

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5,$$

ce que l'on écrit

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

Applications de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

85. Théorème. — *Pour qu'un nombre* A *soit divisible par un nombre* B, *il faut et il suffit qu'il contienne tous les facteurs premiers de* B *avec des exposants au moins égaux à ceux qu'ils ont respectivement dans* B.

1° *C'est nécessaire.* — Car si A est divisible par B, en faisant la division et en appelant Q le quotient, on a $A = B \times Q$; ce qui montre que A est le produit de tous les facteurs premiers de B par les facteurs premiers de Q.

2° *C'est suffisant.* — Car si A contient tous les facteurs premiers de B avec des exposants au moins égaux à ceux qu'ils ont respectivement dans B, en décomposant A en facteurs premiers et en groupant les facteurs premiers dont le produit constitue B, on peut écrire A sous la forme $A = B \times Q$, en appelant Q le produit des autres facteurs qui entrent dans A. Sous cette forme, on voit que A est divisible par B.

Exemple :

Le nombre $2^5 \times 3^3 \times 5^4 \times 7^2 \times 11$ est divisible par 360, car $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

86. Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres décomposés en facteurs premiers. — *Le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres décomposés en facteurs premiers est égal au produit de tous les facteurs premiers communs, chacun de ces facteurs étant pris avec son exposant le plus faible.*

Soient, par exemple, les trois nombres

$$A = 2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 7,$$
$$B = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 11,$$
$$C = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 11.$$

Je dis que leur plus grand commun diviseur est

$$D = 2^3 \times 3 \times 5^2.$$

En effet : 1° c'est un diviseur commun aux trois nombres, en vertu du théorème précédent; 2° c'est le diviseur commun le plus grand, car, en vertu du même théorème, tout diviseur commun aux trois nombres A, B, C ne peut contenir d'autres facteurs premiers que 2, 3 et 5 : s'il renfermait, par exemple, le facteur 7, il ne diviserait pas B. En outre, il ne peut contenir 2 avec une puissance supérieure à 3 parce qu'il ne diviserait ni B ni C. On voit de même qu'il ne peut contenir ni 3 à une puissance supérieure à 1, ni 5 à une puissance supérieure à 2. Donc D est bien le plus grand commun diviseur cherché.

87. Plus petit multiple commun de plusieurs nombres décomposés en facteurs premiers. — *Le plus petit multiple commun de plusieurs nombres décomposés en facteurs premiers est égal au produit de tous les facteurs premiers* différents, *chacun d'eux étant pris avec son exposant le plus fort.*

Par exemple, le plus petit multiple commun des trois nombres A, B, C écrits plus haut (86) est égal à

$$2^4 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2 \times 11.$$

En raisonnant comme pour le plus grand commun diviseur, on voit en effet que ce nombre est divisible par chacun des nombres proposés, et qu'il est le plus petit nombre divisible par chacun d'eux.

Fractions ordinaires.

88. Définitions. — Quand on a une collection d'objets de même espèce, on appelle *unité* (2) l'un quelconque des objets de la collection. Si l'on a, par exemple, une collection de longueurs, toutes égales, l'unité c'est l'une quelconque de ces longueurs.

Supposons alors, pour fixer les idées, que l'unité soit une longueur AB, et imaginons que l'on ait partagé cette longueur en 2, 3, 4, 5, 6, ... parties égales. Chacune de ces

parties s'appelle *un demi*, quand on a partagé en 2 parties égales, *un tiers*, quand on a partagé en 3 parties égales, *un quart*, quand on a partagé en 4 parties égales, *un cinquième*, *un sixième*, etc., quand on a partagé en 5 parties égales, 6 parties égales, etc.

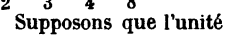
Si l'on prend un nombre quelconque de parties de l'unité partagée en parties égales, on a ce qu'on appelle une *fraction*. Ainsi, on appelle *fraction* une ou plusieurs parties de l'unité partagée en parties égales.

D'après cela, pour définir nettement une fraction, il faut indiquer en combien de parties égales l'unité a été partagée et combien l'on a pris de ces parties. Une fraction est donc déterminée par l'ensemble de deux nombres entiers dont l'un, le *dénominateur*, indique en combien de parties égales l'unité a été partagée, et l'autre, le *numérateur*, combien l'on a pris de ces parties. Le numérateur et le dénominateur s'appellent les deux *termes* de la fraction.

Pour énoncer une fraction, on énonce d'abord le numérateur, puis le dénominateur en le faisant suivre de la terminaison *ième*, s'il n'est pas l'un des nombres 2, 3, 4. On dira, par exemple, la fraction *cinq septièmes*, si l'on a pris 5 parties de l'unité divisée en 7 parties égales ; mais on dira la fraction *cinq demis*, *cinq tiers* ou *cinq quarts*, si l'on a pris 5 parties de l'unité partagée en 2, en 3 ou en 4 parties égales.

On représente une fraction en écrivant le dénominateur sous le numérateur, et en séparant ces deux nombres par un trait horizontal. Les fractions trois demis, cinq tiers, trois quarts, cinq huitièmes, par exemple, s'écriront donc : $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$. On dit encore les fractions 3 *sur* 2, 5 *sur* 3, etc.

Supposons que l'unité AB ait été partagée par exemple en 5 parties égales. Prenons ensuite un nombre quelconque de ces parties, 7 par exemple, et plaçons-les bout à bout. Nous obtenons ainsi une longueur CD qui est une collection de parties de l'unité, c'est-à-dire une collection d'objets de même espèce, mais qui ne sont que des parties de l'unité. De même que la vue d'une collection d'unités a conduit à l'idée de *nombre entier*, de même ici, la vue de cette collection de parties égales de l'unité conduit à l'idée d'une



autre espèce de nombres qu'on appelle des *nombres fractionnaires* ou des *fractions*.

Dans l'exemple choisi, on a été conduit à la fraction $\frac{7}{5}$; mais on voit de plus que si l'on suppose que l'unité soit une longueur, à toute fraction il correspond une autre longueur. On conçoit, d'après cela, qu'il puisse y avoir des fractions *égales* et des fractions *plus grandes* ou *plus petites* que d'autres, de même qu'il y a des longueurs égales, et des longueurs plus grandes ou plus petites que d'autres.

89. Remarque. — Un nombre entier est une fraction qui a pour numérateur ce nombre et pour dénominateur 1.

90. Théorème. — *Une fraction est plus grande ou plus petite que l'unité suivant que son numérateur est plus grand ou plus petit que son dénominateur.*

Il est évident que l'unité est égale à l'une quelconque des fractions $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, ..., c'est-à-dire à toute fraction dont le numérateur est égal au dénominateur. Car, pour former une telle fraction, on prend autant de parties de l'unité qu'il y en a dans l'unité.

Cela posé, il est clair que la fraction $\frac{4}{5}$, par exemple, est inférieure à l'unité, puisque pour la former on a pris 4 cinquièmes de l'unité, alors qu'il faut 5 cinquièmes pour avoir l'unité.

On voit de même qu'une fraction telle que $\frac{7}{3}$, par exemple, est supérieure à l'unité.

91. Théorème. — *Quand on multiplie ou que l'on divise le numérateur d'une fraction par un nombre entier, la fraction est rendue ce nombre de fois plus grande ou plus petite.*

Soit, par exemple, la fraction $\frac{5}{8}$. Si l'on multiple son numérateur par 3, on obtient la fraction $\frac{15}{8}$. Je dis que cette fraction $\frac{15}{8}$ est 3 fois plus grande que la fraction $\frac{5}{8}$, ce qui veut dire qu'il faut trois fractions égales à $\frac{5}{8}$ pour avoir

la fraction $\frac{15}{8}$. En effet, dans les deux cas l'unité a été partagée en huitièmes. On en a pris 5 pour former $\frac{5}{8}$, et on en a pris 3 fois plus pour former $\frac{15}{8}$. Autrement dit, pour former $\frac{15}{8}$, on a pris 3 fois le nombre de huitièmes nécessaires pour former $\frac{5}{8}$ et, par suite, il faut 3 fractions égales à $\frac{5}{8}$ pour avoir la fraction $\frac{15}{8}$.

Inversement, en divisant 15 par 3 on obtient la fraction $\frac{5}{8}$, qui est 3 fois plus petite que $\frac{15}{8}$, parce que $\frac{15}{8}$ est 3 fois plus grande que $\frac{5}{8}$.

92. Théorème. — *Quand on multiplie ou que l'on divise le dénominateur d'une fraction par un nombre entier, la fraction est rendue ce nombre de fois plus petite ou plus grande.*

Supposons, d'abord, que l'on multiplie le dénominateur par un nombre entier. Soit par exemple la fraction $\frac{5}{8}$, dont on multiplie le dénominateur par 3, ce qui donne la fraction $\frac{5}{24}$. Il s'agit de démontrer qu'il faut 3 fractions égales à $\frac{5}{24}$ pour avoir la fraction $\frac{5}{8}$.

Pour cela, remarquons que si, après avoir partagé l'unité en 8 parties égales, on partage chacune de ces parties en 3 parties égales, on obtient en tout 24 parties égales, c'est-à-dire 24 vingt-quatrièmes ; de sorte qu'il faut 3 vingt-quatrièmes pour faire 1 huitième. Il en résulte que pour avoir 5 huitièmes, il faudra 5 fois 3 vingt-quatrièmes, c'est-à-dire 15 vingt-quatrièmes, c'est-à-dire enfin 3 fois 5 vingt-quatrièmes, puisque 15 est égal à 3 fois 5.

Si nous passons maintenant au cas de la division, il suffit de remarquer que si l'on divise par 3 le dénominateur de

$\frac{5}{24}$, on obtient la fraction $\frac{5}{8}$, qui est 3 fois plus grande que $\frac{5}{24}$, parce que celle-ci, d'après ce que l'on vient de voir, est trois fois plus petite que celle-là.

93. Théorème. — *Quand on multiplie ou que l'on divise les deux termes d'une fraction par le même nombre entier, on obtient une fraction égale à la première.*

Ainsi la fraction $\frac{5\times3}{8\times3}$ ou $\frac{15}{24}$ est égale à la fraction $\frac{5}{8}$. En effet, $\frac{5}{8}$ est trois fois plus petite que $\frac{5\times3}{8}$ (91). De même $\frac{5\times3}{8\times3}$ est trois fois plus petite que $\frac{5\times3}{8}$ (92). Donc les deux fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{5\times3}{8\times3}$ sont égales, comme étant chacune 3 fois plus petite que $\frac{5\times3}{8}$.

Le cas de la division se déduit de celui de la multiplication, puisque l'on passe de $\frac{5\times3}{8\times3}$ à $\frac{5}{8}$ en divisant par 3 les deux termes de la première de ces deux fractions.

94. Remarque. — Quand il est question de diviser par un nombre entier, dans les trois propositions que l'on vient de démontrer, on suppose, bien entendu, que les divisions indiquées se font sans reste.

95. Simplification des fractions. — *Simplifier* une fraction, c'est trouver une fraction qui lui soit égale et dont les deux termes soient respectivement moindres que ceux de la première.

Lorsque les deux termes d'une fraction sont divisibles par le même nombre, on simplifie évidemment la fraction en divisant les deux termes par ce nombre (93). D'après cela, on pourra simplifier une fraction en divisant le numérateur et le dénominateur par leurs diviseurs communs, ou encore en supprimant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur à mesure qu'on les aperçoit ; car, pour diviser un produit de facteurs par un facteur de ce produit, il suffit de supprimer ce facteur dans le produit (41).

En particulier, si les deux termes sont décomposés en facteurs premiers, il suffit de supprimer les facteurs premiers communs.

96. Fractions irréductibles. — On dit qu'une fraction est *irréductible* quand ses deux termes sont premiers entre eux.

Le théorème suivant prouve qu'une fraction irréductible ne peut pas être simplifiée et justifie la dénomination adoptée.

97. Théorème. — *Toute fraction égale à une fraction irréductible a ses deux termes équimultiples de ceux de la fraction irréductible.*

Quand on multiplie plusieurs nombres, 3, 4, 5, par exemple, par le *même* nombre, les nouveaux nombres sont dits *équimultiples* des premiers. Ainsi, 3×7, 4×7, 5×7 sont équimultiples de 3, 4, 5.

Cela posé, considérons une fraction $\frac{a}{b}$ égale à une fraction irréductible $\frac{5}{8}$. On aura aussi

$$\frac{a}{b}=\frac{5\times b}{8\times b}=\frac{a\times 8}{b\times 8}.$$

Mais les deux fractions égales, $\frac{5\times b}{8\times b}$ et $\frac{a\times 8}{b\times 8}$, ont le même dénominateur ; donc elles ne peuvent être égales que si les numérateurs sont égaux, c'est-à-dire que si l'on a

$$a\times 8=5\times b.$$

En vertu de cette égalité, on peut dire que le nombre $a\times 8$ est un multiple de 5 ou que 5 divise $a\times 8$. Or, 5 est premier avec 8, donc il divise a (66). En appelant q le quotient de cette division, on a

$$a=5\times q,$$

et l'égalité $a\times 8=5\times b$ peut s'écrire

$$5\times q\times 8=5\times b.$$

Divisons les deux membres de cette égalité par 5, ce qui se fait en supprimant le facteur 5 dans chacun des produits (41), et nous aurons

$$b=q\times 8 \quad \text{ou} \quad 8\times q.$$

Ainsi, a et b sont égaux respectivement à 5 et à 8 multipliés par le même nombre q : ce sont des équimultiples de 5 et de 8.

98. Corollaire I. — *Toute fraction égale à une fraction irréductible a ses termes moins simples, c'est-à-dire respectivement plus grands que ceux de la fraction irréductible.*

En d'autres termes, une fraction irréductible ne peut pas être simplifiée ou, comme l'on dit, *est réduite à sa plus simple expression.*

99. Corollaire II. — *Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il suffit de diviser ses deux termes par leur plus grand commun diviseur.*

Car, en faisant ces divisions, les deux termes de la nouvelle fraction sont premiers entre eux (65).

Réduction des fractions au même dénominateur.

100. Définition. — *Réduire* plusieurs fractions au même dénominateur, c'est trouver des fractions qui leur soient respectivement égales et qui aient le même dénominateur.

On peut toujours supposer que les fractions données soient irréductibles. Alors, en vertu du théorème précédent (97), le dénominateur commun sera un multiple commun des dénominateurs.

Réciproquement, *si l'on a un multiple commun des dénominateurs, on peut trouver des fractions respectivement égales aux fractions proposées et ayant pour dénominateur commun le multiple commun considéré.*

Prenons par exemple les fractions $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{7}$.

On reconnaît facilement que 462 est un multiple commun des dénominateurs. Divisons alors 462 par 2, par 3, par 7, et soient 231, 154, 66 les quotients respectifs obtenus, de sorte que l'on a

$$462 = 2 \times 231 = 3 \times 154 = 7 \times 66.$$

Il est clair alors que si l'on multiplie les deux termes de la première fraction par 231, les deux termes de la deuxième par 154 et les deux termes de la troisième par 66, on obtient les fractions

$$\frac{3 \times 231}{2 \times 231}, \quad \frac{4 \times 154}{3 \times 154}, \quad \frac{5 \times 66}{7 \times 66},$$

qui sont respectivement égales aux fractions proposées et qui ont le même dénominateur, 462.

D'après cela, on voit qu'il y a une infinité de manières de réduire plusieurs fractions données au même dénominateur. En particulier, si l'on multiplie entre eux tous les dénominateurs des fractions données on a évidemment un multiple commun des dénominateurs, et on peut faire la réduction de manière à obtenir des fractions ayant pour dénominateur le produit des dénominateurs. On constate facilement que l'on peut, pour cela, adopter les règles suivantes :

I. — *Pour réduire deux fractions au même dénominateur, on multiplie les deux termes de chacune d'elles par le dénominateur de l'autre.*

II. — *Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, on multiplie les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres.*

101. Réduction au plus petit dénominateur commun. — Mais en procédant ainsi on n'est pas certain d'avoir fait la réduction de la manière la plus simple, et l'on peut se proposer de faire la réduction de manière à obtenir comme dénominateur commun le plus petit nombre possible.

On dit alors que les fractions sont réduites à leur *plus petit dénominateur commun.*

Si l'on reprend le raisonnement du numéro précédent, on voit que le plus petit dénominateur commun est égal au plus petit multiple commun des dénominateurs des fractions *supposées irréductibles*, et l'on est conduit à la règle suivante :

Pour réduire plusieurs fractions au plus petit dénominateur commun, on les réduit d'abord à leur plus simple expression, puis on cherche le plus petit multiple commun des dénominateurs des nouvelles fractions. On divise ce plus petit multiple commun par chaque dénominateur, on multiplie le numérateur de chaque fraction par le quotient correspondant, et l'on a ainsi les numérateurs des nouvelles fractions ; quant aux dénominateurs, ils sont égaux au plus petit multiple commun trouvé plus haut.

Soit, par exemple, à réduire au plus petit dénominateur commun les fractions irréductibles

$$\frac{7}{24}, \frac{13}{60}, \frac{17}{18}.$$

On a :

$$24 = 2^3 \times 3 ;$$
$$60 = 2^2 \times 3 \times 5 ;$$
$$18 = 2 \times 3^2.$$

Le plus petit multiple commun des dénominateurs est donc

$$2^3 \times 3^2 \times 5 = 360 ;$$

d'ailleurs les quotients de 360 par les dénominateurs respectifs sont

$$3 \times 5, \quad 2 \times 3 \quad \text{et} \quad 2^2 \times 5.$$

Les fractions réduites au plus petit dénominateur commun seront donc

$$\frac{7 \times 3 \times 5}{360}, \qquad \frac{13 \times 2 \times 3}{360} \qquad \text{et} \qquad \frac{17 \times 2^2 \times 5}{360}.$$

102. Théorème. — *Lorsque deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.*

Ainsi $\frac{7}{8}$ est plus grande que $\frac{5}{8}$, parce que pour avoir $\frac{7}{8}$ on a pris 7 parties de l'unité divisée en 8 parties égales, tandis qu'on n'en a pris que 5 pour avoir $\frac{5}{8}$.

103. Comparaison des fractions. — D'après cela pour comparer des fractions on les réduira au même dénominateur, et l'on comparera ensuite les numérateurs.

Opérations sur les fractions.

Addition.

104. Définitions. — *Additionner* plusieurs nombres entiers ou fractionnaires, c'est trouver un nombre entier ou fractionnaire qui soit composé avec toutes les unités et fractions d'unités qui composent les nombres donnés. L'opération à l'aide de laquelle on trouve ce nombre s'appelle l'*addition*, et le résultat de l'addition, c'est-à-dire le nombre cherché, s'appelle la *somme* des nombres donnés.

Cette définition de l'addition n'est donc, comme on le voit, que l'extension de la définition de l'addition des nombres entiers.

105. Théorème. — *La somme de plusieurs nombres fractionnaires ayant le même dénominateur est une fraction qui a le même dénominateur, et dont le numérateur est égal à la somme des numérateurs des fractions données.*

Soit, par exemple, à ajouter les fractions

$$\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}.$$

Par définition, la somme doit contenir les 2 cinquièmes, plus les 4 cinquièmes, plus les 6 cinquièmes de l'unité. Elle doit donc contenir $2+4+6$ cinquièmes de l'unité, et elle est, par suite, égale à la fraction $\frac{2+4+6}{5}$, obtenue d'après la règle énoncée.

On indique ce résultat en écrivant l'égalité

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{6}{5}=\frac{2+4+6}{5}.$$

106. Remarque. — Lorsque plusieurs nombres entiers ou fractionnaires n'ont pas le même dénominateur, on obtient leur somme en les réduisant d'abord au même dénominateur, et en appliquant ensuite le théorème précédent.

D'ailleurs, pour faire la somme des numérateurs, on peut changer à volonté l'ordre des termes, ainsi qu'on l'a vu dans la théorie de l'addition des nombres entiers.

Soustraction.

107. Définitions. — Lorsque deux nombres sont entiers, *soustraire* le plus petit du plus grand, c'est trouver un nombre qui, ajouté au plus petit, reproduise le plus grand.

De même soustraire un nombre entier ou fractionnaire d'un autre nombre entier ou fractionnaire *plus grand* que lui, c'est trouver un troisième nombre qui, ajouté au plus petit, reproduise le plus grand. L'opération qui permet de trouver ce nombre s'appelle la *soustraction*, et le résultat s'appelle la *différence* des deux nombres donnés.

108. Théorème. — *Lorsque deux nombres fractionnaires ont le même dénominateur, leur différence est une fraction qui a le même dénominateur, et dont le numérateur est égal à la différence des numérateurs.*

Il s'agit, par exemple, de prouver que la différence entre

$\frac{7}{5}$ et $\frac{4}{5}$ est égale à $\frac{7-4}{5}$, c'est-à-dire à $\frac{3}{5}$. En effet, 3 étant la différence entre 7 et 4, la somme $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$ est égale à $\frac{7}{5}$, d'après ce que l'on a montré plus haut (105); donc, la différence cherchée est bien $\frac{7-4}{5}$.

On exprime ce résultat en écrivant l'égalité

$$\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{7-4}{5}.$$

109. **Remarque.** — Pour retrancher deux nombres entiers ou fractionnaires quelconques, on commence par les réduire au même dénominateur, et on applique ensuite le théorème précédent.

Multiplication.

110. **Définitions.** — Lorsque le multiplicateur est un nombre entier, *multiplier* c'est répéter le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur : c'est, si l'on veut, ajouter autant de fractions égales au multiplicande qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, opération que l'on sait faire (105).

Cette définition n'a plus de sens quand le multiplicateur est fractionnaire. Pour définir la multiplication dans ce cas, on observe d'abord, et cela a été démontré (92), que si l'on multiplie le dénominateur d'une fraction par un nombre, dénominateur qui peut être égal à 1 si la fraction est un entier, on rend la fraction ce nombre de fois plus petite. Par exemple, si l'on multiplie par 5 le dénominateur de la fraction $\frac{7}{1}$, on obtient la fraction $\frac{7}{5}$, qui est 5 fois plus petite que 7 : on dit alors que l'on a pris la *cinquième partie* de 7.

Cela posé, *multiplier un nombre entier ou fractionnaire* par $\frac{3}{5}$ par exemple, c'est répéter 3 fois la cinquième partie du multiplicande. On définit d'une manière analogue la multiplication pour un autre multiplicateur quelconque. Le résultat de l'opération s'appelle encore *produit*.

111. Théorème. — *Le produit d'une fraction par un nombre entier est une fraction qu'on déduit de la fraction considérée en multipliant son numérateur par l'entier et en conservant le dénominateur.*

Soit, par exemple, à multiplier $\frac{4}{5}$ par 3. Par définition, on a

$$\frac{4}{5}\times 3 = \frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5} = \frac{4+4+4}{5} = \frac{4\times 3}{5}.$$

112. Théorème. — *Le produit de deux nombres entiers ou fractionnaires est un nombre entier ou fractionnaire qui a pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs.*

Soit, par exemple, à multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$. Par définition, il faut répéter 5 fois la septième partie de $\frac{3}{4}$; mais la septième partie de $\frac{3}{4}$ est $\frac{3}{4\times 7}$ et, si on la répète 5 fois, on obtient $\frac{3\times 5}{4\times 7}$ (111).

113. Remarque. — On définit le produit de plusieurs facteurs entiers ou fractionnaires, donnés dans un ordre déterminé, comme dans la multiplication des nombres entiers (17). En vertu du théorème précédent, ce produit aura pour numérateur le produit des numérateurs pris dans l'ordre donné, et pour dénominateur le produit des dénominateurs, pris également dans l'ordre donné. Comme ces nouveaux produits sont des produits de nombres entiers, on peut intervertir à volonté l'ordre des facteurs ; donc *on ne change pas un produit de facteurs entiers ou fractionnaires, en intervertissant à volonté l'ordre des facteurs.*

114. Corollaire. — *Pour élever une fraction à une puissance, on élève chaque terme à cette puissance.*

Ainsi, $\left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{5^3}{8^3}$; car on a

$$\left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{5}{8} = \frac{5\times 5\times 5}{8\times 8\times 8} = \frac{5^3}{8^3}.$$

Division.

115. Définition. — On appelle *quotient exact* de deux nombres entiers ou fractionnaires, appelés respectivement *dividende* et *diviseur*, un nombre entier ou fractionnaire dont le produit par le diviseur soit égal au dividende.

116. Théorème. — *Le quotient de deux nombres entiers ou fractionnaires s'obtient en multipliant le dividende par le diviseur renversé.*

Par exemple, le quotient de $\frac{3}{5}$ par $\frac{7}{8}$ est égal à $\frac{3}{5} \times \frac{8}{7}$. En effet, la fraction $\frac{3}{5} \times \frac{8}{7}$ est égale à $\frac{3 \times 8}{5 \times 7}$, et si on la multiplie par le diviseur, on obtient $\frac{3 \times 8 \times 7}{5 \times 7 \times 8}$. Or, si l'on simplifie cette fraction, on voit qu'elle est égale à $\frac{3}{5}$, c'est-à-dire au dividende.

117. Remarque. — *Une fraction ordinaire exprime le quotient exact de la division de son numérateur par son dénominateur.*

En effet, $\frac{3}{4}$ par exemple est le quotient exact de la division de 3 par 4, car $\frac{3}{4} \times 4 = \frac{3 \times 4}{4} = 3$.

Fractions décimales.

118. Définition. — On appelle *fractions décimales* les fractions qui ont pour dénominateur une puissance de 10. Les puissances de 10 sont : 10, 100, 1000, etc. L'avantage de la considération de telles fractions résulte de ce qu'on peut les écrire sous une forme qui rappelle celle des nombres entiers, et grâce à laquelle les calculs relatifs à ces fractions se ramènent à des calculs sur les nombres entiers.

Considérons en effet, d'abord, une fraction décimale dont le numérateur renferme plus de chiffres que le dénominateur ; soit, par exemple, la fraction

$$\frac{32827}{1000}.$$

Comme 32827 peut être considéré comme la somme de 32000, de 800, de 20 et de 7, on a évidemment

$$\frac{32827}{1000} = \frac{32000}{1000} + \frac{800}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{7}{1000};$$

ou bien, en simplifiant chacune des fractions,

$$\frac{32827}{1000} = 32 + \frac{8}{10} + \frac{2}{100} + \frac{7}{1000}.$$

Considérons ensuite une fraction décimale dont le numérateur renferme moins ou autant de chiffres que le dénominateur; soit par exemple $\frac{834}{1000}$. On a évidemment

$$\frac{834}{1000} = \frac{8}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000}.$$

Il suit de là que *toute fraction décimale peut être considérée comme la somme d'un nombre entier, qui peut être* 0, *et d'une suite de fractions dont les dénominateurs sont de* 10 *en* 10 *fois plus forts, et dont les numérateurs sont des nombres d'un seul chiffre.*

119. Convention fondamentale. — Observons maintenant que les fractions $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc., expriment que l'unité a été partagée en parties de 10 en 10 fois plus petites, et *convenons de placer une virgule à droite du nombre entier contenu dans la fraction ou du* 0 *qui le remplace; puis de considérer tout chiffre placé au premier rang à droite de la virgule comme représentant des dixièmes, tout chiffre placé au deuxième rang, toujours à droite, comme représentant des centièmes, etc.*

120. Nombres décimaux. — Moyennant ces conventions, les deux fractions considérées pourront s'écrire respectivement

$$32{,}827 \quad \text{et} \quad 0{,}834$$

et l'on obtient ce qu'on appelle des *nombres décimaux.*

121. Écrire une fraction décimale sous forme de nombre décimal. — En opérant d'une manière analogue pour toutes les fractions décimales, on voit que toute fraction décimale peut être mise sous la forme d'un nombre décimal, d'après la règle suivante :

On écrit le numérateur de la fraction et l'on sépare, sur sa

droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y a de zéros au dénominateur. Si le numérateur renferme moins de chiffres que le dénominateur, avant de mettre la virgule on écrit à gauche du numérateur autant de zéros qu'il en faut pour que le numérateur renferme un chiffre de plus qu'il n'y a de zéros au dénominateur.

Par exemple, la fraction $\frac{34}{1000}$ s'écrira 0,034; la fraction $\frac{28}{10000}$ s'écrira 0,0028, etc.

Le nombre écrit à gauche de la virgule s'appelle et représente la *partie entière* de la fraction; les chiffres placés à droite sont les *chiffres décimaux* et représentent la *partie décimale.*

Dans cette manière d'écrire les fractions décimales, les dizièmes, les centièmes, etc. portent le nom d'unités décimales du *premier ordre*, du *second ordre*, etc. Au reste, la convention fondamentale donnée plus haut (119), n'est autre chose que l'extension de la convention fondamentale de la numération écrite (5) : *tout chiffre placé à la gauche d'un autre exprime des unités de* 10 *en* 10 *fois plus fortes*. Seulement on a introduit de nouvelles unités qui sont les dixièmes, les centièmes, etc.

122. Écrire un nombre décimal sous forme de fraction ordinaire. — La règle à suivre est une conséquence de la précédente, et s'énonce ainsi :

On écrit le nombre décimal comme s'il était entier, et l'on a ainsi le numérateur de la fraction ordinaire qui correspond au nombre décimal ; on donne pour dénominateur, à cette fraction, l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux.

123. Lire un nombre décimal. — On peut lire un nombre décimal comme une fraction ordinaire.

Habituellement, on lit la partie entière, puis la partie décimale en terminant par le nom de l'unité décimale exprimée par le dernier chiffre, en allant de gauche à droite.

124. Théorème. — 1° *On ne change pas la valeur d'un nombre décimal en écrivant autant de zéros que l'on veut à sa droite.*

2° *Quand on avance la virgule d'un nombre décimal de*

1, 2, 3,... *rangs vers la droite ou vers la gauche, on multiplie ou on divise le nombre décimal par*, 10 100, 1000,...

On démontre, sans difficulté, ces propositions en passant du nombre décimal à la fraction ordinaire correspondante.

125. Addition des nombres décimaux. — *Pour ajouter plusieurs nombres décimaux, on les écrit les uns au-dessous des autres de manière que les unités de même ordre se correspondent, et en plaçant les virgules sous les virgules. On les ajoute ensuite comme s'ils étaient entiers, et l'on place la virgule, au résultat, dans la colonne des virgules.*

Soit, par exemple, à faire la somme

$$2{,}527 + 638{,}4 + 0{,}04326.$$

Cela revient à faire la somme

$$\frac{2527}{1000} + \frac{6384}{10} + \frac{4326}{100000}.$$

En réduisant au plus petit dénominateur commun, 100000, cela revient à faire la somme

$$\frac{252700 + 63840000 + 4326}{100000}.$$

Ajoutons donc les numérateurs d'après la règle d'addition des nombres entiers, puis séparons 5 chiffres décimaux à droite du résultat, puisque le dénominateur renferme 5 zéros. En mettant alors en regard ce résultat et celui qu'on obtient d'après la règle, on voit qu'ils sont les mêmes.

2 52700	2,527
638 40000	638,4
4326	0,04326
640,97026	640,97026

126. Soustraction des nombres décimaux. — *Pour retrancher deux nombres décimaux, on écrit le plus petit nombre au-dessous du plus grand, de manière que les unités de même ordre se correspondent, et en plaçant les virgules sous les virgules. On fait ensuite la soustraction comme si les nombres étaient entiers, en plaçant la virgule dans la colonne des virgules.*

On démontre cette règle comme celle de l'addition.

127. Multiplication des nombres décimaux. — *Pour multiplier deux nombres décimaux, on fait la multiplication comme si ces deux nombres étaient entiers, et l'on sépare, sur*

la droite du produit, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le multiplicande et le multiplicateur réunis.

Car, si l'on cherche, par exemple, le produit $8{,}27 \times 0{,}056$, on a

$$8{,}27 \times 0{,}056 = \frac{827}{100} \times \frac{56}{1000} = \frac{827 \times 56}{100000};$$

d'où résulte la règle.

128. Division des nombres décimaux. — *Le quotient* exact *de la division de deux nombres décimaux s'obtient d'après la règle de division de deux fractions ordinaires.*

Par exemple $8{,}34 : 0{,}273 = \frac{834}{100} : \frac{273}{1000} = \frac{834 \times 1000}{273 \times 100}$.

129. Quotient de deux nombres entiers ou décimaux à moins d'une unité décimale d'un ordre donné. — Habituellement, quand on fait la division de deux nombres décimaux, *on se propose de chercher le plus grand nombre d'unités décimales d'un ordre donné dont le produit par le diviseur soit contenu dans le dividende.*

Si l'on cherche le plus grand nombre de dixièmes, on a le quotient à 1 *dixième près par défaut ;* si l'on cherche le plus grand nombre de centièmes, on a le quotient à 1 *centième près par défaut*, etc.

Dans ces conditions, il n'est pas nécessaire de supposer que le dividende et le diviseur soient des nombres décimaux ; car on peut se poser le même problème quand l'un des deux est entier ou quand ils le sont tous les deux .

Cela posé, nous distinguerons deux cas :

Premier cas.— *Le diviseur est un nombre entier.* — Soit par exemple à chercher le quotient de la division de 35,83467 par 12 à $\frac{1}{1000}$ près par défaut. Comme ce quotient doit être un certain nombre de millièmes, appelons-le $\frac{x}{1000}$, de sorte que x sera un nombre entier. Par définition, et puisque $\frac{x}{1000}$ est le quotient cherché, on doit avoir

$$\frac{x}{1000} \times 12 \leq 35{,}83467 < \frac{x+1}{1000} \times 12.$$

En multipliant tout par 1000, on voit que l'on doit avoir aussi

$$x \times 12 \leq 35834{,}67 < (x+1) \times 12.$$

Or, les deux nombres $x \times 12$ et $(x+1) \times 12$ sont entiers. Si donc on a $x \times 12 \leq 35834{,}67$, on aura encore $x \times 12 \leq 35834$; car le nombre *entier* $x \times 12$ ne peut pas être égal au nombre *décimal* 35834,67, et comme il lui est inférieur ou égal, il est certainement inférieur ou égal au nombre entier 35834. De même si l'on a $35834{,}64 < (x+1) \times 12$, on aura *a fortiori* $35834 < (x+1) \times 12$, puisque 35834 est inférieur à 35834,64.

D'après cela, on doit avoir

$$x \times 12 \leq 35834 < (x+1) \times 12,$$

ce qui montre (34) que *x est le quotient à une unité près de la division de* 35834 *par* 12 ; d'où la règle suivante :

Règle. — *Pour obtenir le quotient de la division d'un nombre décimal par un nombre entier à* $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, *etc. près, on avance la virgule du dividende de* 1, 2, *etc. rangs vers la droite ; on divise le nombre entier, à gauche de la virgule, par le diviseur, et l'on sépare à droite du quotient un nombre de zéros égal au nombre de rangs dont on a avancé la virgule du dividende.*

Deuxième cas. — *Le diviseur est un nombre décimal.* — On ramène ce cas au premier en observant que *le quotient cherché ne change pas quand on multiplie le dividende et le diviseur par une puissance quelconque de* 10.

En effet, soit a chercher le quotient à $\frac{1}{1000}$ près de la division de 35,83467 par 12,38. Soit encore $\frac{x}{1000}$ ce quotient, de sorte qu'on peut écrire les inégalités

$$\frac{x}{1000} \times 12{,}38 \leq 35{,}83467 < \frac{x+1}{1000} \times 12{,}38.$$

Multiplions, par exemple, tout par 100 ; on aura

$$\frac{x}{1000} \times 1238 \leq 3583{,}467 < \frac{x+1}{1000} \times 1238,$$

ce qui montre que $\frac{x}{1000}$ est le quotient, à $\frac{1}{1000}$ près, de la division du dividende multiplié par 100, par le diviseur multiplié également par 100.

D'après cela, si l'on multiplie le dividende et le diviseur

par une puissance de 10 telle que le diviseur devienne entier, on ramène le deuxième cas au premier.

130. **Remarque.** — Pour appliquer la règle au cas où le dividende est un nombre entier, il suffit de remarquer que tout nombre entier est un nombre décimal dont tous les chiffres décimaux en nombre arbitraire sont des zéros.

Carré et racine carrée.

131. **Définitions.** — Nous avons appelé *carré* d'un nombre (29) le produit de deux facteurs égaux à ce nombre. Un nombre entier ou fractionnaire n'est pas nécessairement le carré d'un autre nombre entier ou fractionnaire. Quand un nombre entier ou fractionnaire est le carré d'un autre nombre, on dit qu'il est un *carré parfait*, et le nombre dont il est le carré s'appelle sa *racine carrée exacte*. Dans tout ce qui suit, nous ne nous occuperons que des nombres entiers ou décimaux.

Un nombre entier ou décimal étant donné, on appelle *racine carrée* de ce nombre *à moins d'une unité* ou à une unité près par défaut, le plus grand nombre entier dont le carré soit contenu dans le nombre proposé.

On appelle *racine carrée* d'un nombre entier ou décimal à *moins d'un dixième*, *d'un centième*, *d'un millième*, etc., le plus grand nombre de dixièmes, de centièmes, de millièmes, etc., dont le carré soit contenu dans le nombre proposé.

L'opération par laquelle on cherche la racine carrée d'un nombre à moins d'une unité décimale d'un ordre donné s'appelle l'*extraction* de la racine carrée de ce nombre.

Il est clair qu'une racine carrée approchée à moins d'une unité ou à moins d'une unité décimale d'un ordre donné, peut être exacte. Par exemple la racine carrée de 36 à moins d'une unité est égale à la racine exacte, 6.

Nous nous occuperons d'abord de la recherche de la racine carrée d'un nombre entier à moins d'une unité et nous commencerons par démontrer quelques propositions.

132. **Théorème I.** — *Le carré de la somme de deux nombres entiers est égal au carré du premier nombre, plus le double produit du premier nombre par le second, plus le carré du second nombre.*

Par exemple $(3+5)^2 = 3^2 + 2\times 3\times 5 + 5^2$. En effet, $(3+5)^2$ est le produit de deux facteurs égaux à $3+5$. Or, on a vu (28) que

$$(3+5)\times(3+5) = 3\times 3 + 5\times 3 + 3\times 5 + 5\times 5.$$

Mais on peut remplacer 3×3 par 3^2, $5\times 3 + 3\times 5$ par $2\times 3\times 5$, et enfin 5×5 par 5^2. On a alors

$$(3+5)^2 = 3^2 + 2\times 3\times 5 + 5^2.$$

On raisonne d'une manière analogue dans tous les cas.

133. Théorème II. — *Lorsqu'un nombre est plus grand que* 100, *on obtient les dizaines de sa racine carrée à moins d'une unité, en extrayant la racine carrée à moins d'une unité des centaines de ce nombre.*

Puisque le carré de 10 est égal à 100, il est clair que la racine carrée d'un nombre plus grand que 100 est au moins égale à 10, et, par conséquent, renferme des dizaines.

Cela posé, prenons par exemple le nombre 578421. On constate facilement que la racine carrée à moins d'une unité du nombre 5784, qui représente les centaines du nombre proposé, est 76. Le théorème énoncé signifie alors, sur l'exemple choisi, que la racine carrée de 578421 à moins d'une unité contient bien 76 dizaines, mais n'en contient pas 77. En d'autres termes, cela signifie que le carré de 760 est bien contenu dans 578421, mais que le carré de 770 n'y est pas contenu.

En effet, puisque 76 est la racine carrée de 5784 à moins d'une unité, cela signifie, par définition, que 5784 contient bien le carré de 76 mais ne contient pas le carré de 77. On peut donc écrire les inégalités

$$76^2 \leq 5784 < 77^2.$$

En multipliant tout par 100, c'est-à-dire par 10^2, et en observant (31) que $76^2\times 10^2 = 760^2$, et que $77^2\times 10^2 = 770^2$, des inégalités précédentes on déduit les suivantes :

$$760^2 \leq 578400 < 770^2.$$

En vertu de ces nouvelles inégalités, on a certainement $760^2 \leq 578421$. D'autre part, les deux nombres 578400 et 770^2 étant terminés par deux zéros se composent de centaines ; de sorte que pour passer du premier au second il faut lui ajouter au moins 100. Par conséquent, si on ne lui ajoute que 21, on obtiendra un résultat plus petit que 770^2. Il suit de là qu'on peut certainement affirmer que l'on a

$$760^2 \leq 578421 < 770^2.$$

D'où il résulte que le carré de 760 est bien contenu dans 578421, mais que le carré de 770 n'y est pas contenu.

Ce théorème étant démontré, proposons-nous alors de résoudre le problème suivant :

134. Problème. — *Connaissant les dizaines de la racine carrée d'un nombre entier à moins d'une unité, trouver les unités de cette racine.*

Soit, par exemple, à extraire la racine carrée à moins d'une unité du nombre 587462. On constate sans difficulté que la racine carrée de 5874 à moins d'une unité est 76, de sorte que, d'après le théorème précédent, il y a 76 dizaines dans la racine carrée de 587462 à moins d'une unité. Si donc on appelle x le chiffre inconnu des unités, la racine carrée cherchée est $760 + x$. Le carré de cette racine est donc (132) $760^2 + 2 \times 760 \times x + x^2$. Ce carré devant être contenu dans le nombre proposé, on pourra retrancher successivement chacune de ses parties de ce nombre. Si alors on retranche d'abord 760^2, le reste obtenu devra contenir les deux autres parties, savoir : $2 \times 760 \times x$ et x^2. D'ailleurs pour retrancher 760^2, nombre terminé par deux zéros, *on observe qu'il suffit de retrancher* 76^2 *de* 5874 *et d'écrire* 62 *à droite du reste.*

On obtient ainsi le nombre 9862, qui doit contenir $2 \times 760 \times x$ et x^2, d'après le raisonnement que l'on vient de faire. Mais le produit $2 \times 760 \times x$ étant terminé par un zéro, est un nombre exact de dizaines ; donc il doit être contenu dans les 986 dizaines du nombre 9862, qui doit d'ailleurs contenir aussi les dizaines de x^2, s'il y en a. Comme $2 \times 760 \times x$ est égal à $2 \times 76 \times x \times 10$, cela revient à dire que le nombre 986 contient au moins le produit $2 \times 76 \times x$. Le nombre 986 peut donc contenir le produit 2×76 par un nombre plus grand que x ; dès lors, si l'on divise 986 par 2×76, c'est-à-dire *par le double des dizaines de la racine*, on aura le nombre cherché, *x, ou un nombre trop fort.*

Pour voir si ce chiffre est exact ou trop fort, on en fait *l'essai.* Dans le cas actuel, on a $2 \times 76 = 152$, et le quotient, à une unité près, de la division de 986 par 152 est 6. L'essai du chiffre 6 consiste à voir si l'on peut retrancher 766^2 du nombre proposé.

Il y a une manière particulière de faire cette soustraction. On a en effet

$$766^2 = (760 + 6)^2 = 760^2 + 2 \times 760 \times 6 + 6^2.$$

Or on a déjà retranché 760^2 et l'on a trouvé comme reste 9862. Pour faire l'essai de 6, il suffira donc de voir si, de 9862, on peut retrancher le nombre $2 \times 760 \times 6 + 6^2$. Ce nombre est égal à $(2 \times 760 + 6) \times 6$, ou à 1526×6, et l'on observe que pour avoir 1526 il suffit d'écrire 6 à droite du double de 76. Donc, *pour faire l'essai du chiffre trouvé, il suffit d'écrire ce nombre à droite du double des dizaines de la racine, de multiplier le nombre ainsi formé par le chiffre à essayer, et de voir si l'on peut retrancher ce produit de* 9862.

Si cette soustraction est possible, le chiffre est exact; sinon, il est trop fort. Dans ce cas, on le diminue d'une unité ; on essaie le nouveau chiffre de la même manière que le premier, et l'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait obtenu le chiffre exact.

Dans l'exemple actuel, le chiffre 6 est exact, de sorte que la racine carrée est 766 ; d'où la règle suivante :

RÈGLE. — *Pour avoir les unités de la racine carrée, quand on connaît les dizaines, on retranche le carré des dizaines du nombre proposé et l'on divise le nombre des dizaines du reste par le double du nombre des dizaines de la racine. On obtient ainsi le chiffre des unités ou un chiffre trop fort, et l'on fait l'essai de ce chiffre comme il a été dit plus haut.*

135. Extraction de la racine carrée d'un nombre entier à moins d'une unité. — Le problème précédent étant résolu, nous examinerons deux cas :

Premier cas. — *Le nombre donné est inférieur à* 100. — On obtient alors immédiatement la racine carrée cherchée au moyen de la table de Pythagore. Ainsi, la racine carrée de 56 à moins d'une unité est 7 ; car $7^2 = 49 < 56$, tandis que $8^2 = 64 > 56$.

Deuxième cas. — *Le nombre donné est quelconque.* — Soit par exemple à extraire la racine carrée de 584762. Ce nombre étant supérieur à 100, sa racine a au moins deux chiffres, et l'on obtient les dizaines de cette racine en extrayant la racine de 5847 à moins d'une unité (133). Mais le nombre 5847 étant lui-même supérieur à 100, on obtient les dizaines de sa racine en extrayant la racine de 58 à moins d'une unité. Cette racine étant 7, on a ainsi le chiffre des dizaines de la racine de 5847 ; on en déduit le chiffre des

unités par l'application de la règle précédente (134), et l'on voit que la racine carrée de 5847 à moins d'une unité est 76.

Il en résulte (183) que 76 représente le nombre des dizaines de la racine de 584762. On en déduit le chiffre, 4, des unités par l'application de la même règle, et la racine cherchée est 764.

D'après cela, voici la règle pratique :

Règle. — *Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier à moins d'une unité, on partage ce nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir qu'un seul chiffre. On extrait la racine carrée à moins d'une unité de la première tranche à gauche ; on a ainsi le premier chiffre à gauche de la racine. On retranche le carré de ce chiffre de la première tranche à gauche, et on abaisse la tranche suivante à droite du résultat, ce qui donne le* premier reste.

On sépare un chiffre à droite de ce reste, et on divise le nombre formé à gauche par le double du chiffre de la racine ; on obtient ainsi le deuxième chiffre de la racine ou un chiffre trop fort.

On fait alors l'essai de ce chiffre. Pour cela, on écrit le chiffre à essayer à droite du diviseur qui l'a fourni, on multiplie le nombre ainsi obtenu par le chiffre à essayer, et on examine si le produit peut être retranché du premier reste. Si la soustraction est possible, le chiffre est exact ; sinon il est trop fort et on le diminue d'une unité, puis on essaie le nouveau chiffre de la même manière que le précédent, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait obtenu le chiffre exact.

Le chiffre exact ayant été obtenu, on l'écrit à la droite du premier, on effectue la soustraction qui a permis d'en vérifier l'exactitude, et, à la droite du résultat, on abaisse la tranche suivante, ce qui donne le deuxième reste.

On sépare un chiffre à droite de ce reste, et on divise le nombre formé à gauche par le double du nombre formé par les deux chiffres trouvés à la racine. On obtient ainsi le chiffre suivant de la racine ou un chiffre trop fort. On fait l'essai de ce chiffre comme on a fait l'essai du chiffre précédent, et on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait employé toutes les tranches.

On dispose l'opération comme il suit :

58·47·62	764		
94·7	146	1524	
7 1 6·2	6	4	
1 0 6 6	876	6096	

136. Remarque. — Il résulte de la règle que le nombre des chiffres de la racine est égal au nombre des tranches.

137. Définition du reste. — On appelle *reste* de la racine carrée la différence entre le nombre et le carré de sa racine à moins d'une unité. Il est égal au dernier reste obtenu en appliquant la règle. Dans le cas précédent, il est égal à 1066.

On *démontre* qu'il est inférieur au double de la racine plus 1.

138. Racine carrée à moins d'une unité d'un nombre décimal. — *La racine carrée à moins d'une unité d'un nombre décimal est la même que la racine carrée à moins d'une unité de sa partie entière.*

Soit le nombre 5847,62, dont la partie entière est 5847. La racine carrée à moins d'une unité de la partie entière étant 76, il s'agit de prouver que 76 est aussi la racine carrée de 5847,62 à moins d'une unité, c'est-à-dire que 5847,62 contient le carré de 76 mais ne contient pas le carré de 77. Or, le carré de 76 étant contenu, par hypothèse, dans 5847, est contenu à plus forte raison dans 5847,62. D'autre part, 5847 étant inférieur à 77^2, par·hypothèse également, 5847,62 sera aussi inférieur à 77^2 ; car, pour passer de 5847 à 77^2, il faut lui ajouter au moins 1, de sorte que si on ne lui ajoute que 0,62, le résultat sera encore inférieur à 77^2.

Il suit bien de là que le carré de 76 est contenu dans 5847,62, tandis que le carré de 77 n'y est pas contenu, et la proposition est démontrée.

139. Racine carrée d'un nombre entier ou décimal à moins d'une unité décimale d'un ordre donné. — Soit, par exemple, à extraire la racine carrée du nombre 58,47628 à $\frac{1}{100}$ près : 100 sera appelé le *dénominateur de l'approximation.*

Il s'agit de trouver le plus grand nombre de centièmes dont le carré soit contenu dans 58,47628. On peut représen-

ter ce plus grand nombre de centièmes par $\frac{x}{100}$, x désignant un nombre entier inconnu ; de sorte que le carré de $\frac{x}{100}$ est, par définition, contenu dans 58,47628, tandis que le carré de $\frac{x+1}{100}$ n'y est pas contenu. On a donc les inégalités

$$\left(\frac{x}{100}\right)^2 \leq 58{,}47628 < \left(\frac{x+1}{100}\right)^2.$$

Si l'on multiplie tout par 100^2, ces inégalités deviennent

$$x^2 \leq 584762{,}8 < (x+1)^2 ;$$

ce qui montre que le carré de x est contenu dans 584762,8, tandis que le carré de $(x+1)$ n'y est pas contenu ; par suite, x est la racine carrée de 584762,8 à moins d'une unité, ou, ce qui revient au même (138), la racine carrée de 584762 à moins d'une unité. D'ailleurs, le nombre x étant ainsi trouvé, pour avoir la racine carrée demandée, il n'y a qu'à diviser x par 100, c'est-à-dire à séparer deux chiffres décimaux à droite de x.

La racine carrée de 584762 à moins d'une unité étant 764, x est égal à 764 ; de sorte que la racine carrée de 58,47628 à moins de $\frac{1}{100}$ est 7,64.

On déduit de là la règle suivante :

Règle. — *Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier ou décimal à moins d'une unité décimale d'un ordre donné, on avance la virgule du nombre décimal vers la droite, et d'un nombre de rangs égal au double du nombre des zéros du dénominateur de l'approximation. On extrait ensuite la racine carrée à moins d'une unité du nombre formé à gauche et, à droite du résultat, on sépare un nombre de chiffres décimaux égal au nombre des zéros du dénominateur de l'approximation.*

Pour appliquer cette règle à un nombre entier, il n'y a qu'à considérer ce nombre entier comme un nombre décimal dont tous les chiffres décimaux, en nombre quelconque, sont des zéros.

Rapports et Proportions.

Rapports.

140. **Définitions.** — On appelle *rapport* de deux nombres entiers ou fractionnaires le quotient exact de la division du premier par le second.

On représente le rapport de deux nombres en écrivant le second nombre au-dessous du premier et en séparant les deux nombres par un trait horizontal. Par analogie avec les fractions ordinaires, on appelle le premier nombre le *numérateur* du rapport, et le second nombre le *dénominateur* : le numérateur et le dénominateur sont appelés les deux *termes* du rapport.

Ainsi, le rapport de 3 à 5 est la fraction ordinaire $\frac{3}{5}$; le rapport de $\frac{3}{5}$ à $\frac{4}{7}$ est le quotient $\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3 \times 7}{5 \times 4}$, et on le représente par $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}$, qu'on énonce 3 cinquièmes *sur* 4 septièmes : $\frac{3}{5}$ est le numérateur du rapport et $\frac{4}{7}$ en est le dénominateur.

Dans tout ce qui suit, et afin de simplifier l'écriture et le langage, nous désignerons le numérateur par une lettre, a, le dénominateur par une lettre, b, et le quotient exact par une lettre, q ; de sorte qu'on aura, *par définition*, $a = b \times q$; ce qui équivaut à $\frac{a}{b} = q$.

141. **Théorème.** — *Quand on multiplie les deux termes d'un rapport par un nombre, on obtient un rapport égal au premier.*

Soit c le nombre par lequel on multiplie les deux termes du rapport $\frac{a}{b}$: il s'agit de prouver que $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$.

En effet, si q est le quotient exact de la division de a par b, on a $a = b \times q$,

et, en multipliant tout par c, on en déduit

$$a \times c = b \times c \times q.$$

Ceci montre que q est aussi le quotient exact de la division de $a \times c$ par $b \times c$ et, par conséquent, que

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}.$$

142. **Remarque I.** — On prouverait de même qu'*on obtient un rapport égal à un rapport donné, quand on divise les deux termes du premier rapport par un même nombre.*

143. **Remarque II.** — De ces deux propositions on déduit une règle de réduction de plusieurs rapports au même dénominateur identique à la règle de réduction de plusieurs fractions au même dénominateur (100), et le moyen de simplifier, dans certains cas, les deux termes d'un rapport (95).

144. **Somme de plusieurs rapports.** — *Lorsque plusieurs rapports ont le même dénominateur, on obtient leur somme en faisant la somme des numérateurs, et en prenant comme dénominateur le dénominateur commun.*

Soient, en effet, plusieurs rapports, $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b}$, $\frac{a''}{b}$, représentant les quotients respectifs q, q', q''. On a

$$a = b \times q, \qquad a' = b \times q', \qquad a'' = b \times q'',$$

et, en faisant la somme,

$$a + a' + a'' = b \times (q + q' + q''),$$

car $b \times (q + q' + q'') = b \times q + b \times q' + b \times q''$ (27). Mais l'égalité $a + a' + a'' = b \times (q + q' + q'')$ signifie que $q + q' + q''$ est le quotient exact de $a + a' + a''$ par b, c'est-à-dire le rapport $\frac{a + a' + a''}{b}$. Comme, d'autre part, $q + q' + q''$ est la somme $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b} + \frac{a''}{b}$, on a bien, conformément à la règle,

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b} + \frac{a''}{b} = \frac{a + a' + a''}{b}.$$

145. **Remarque I.** — Lorsque les rapports n'ont pas le même dénominateur, on commence par les réduire au même dénominateur et on applique, ensuite, la règle précédente.

146. **Remarque II.** — On prouve de même que *la différence de deux rapports s'obtient en les réduisant d'abord au*

même dénominateur, et en prenant ensuite le rapport qui a pour numérateur la différence des numérateurs et pour dénominateur le dénominateur commun.

147. Produit de plusieurs rapports. — Le produit de plusieurs rapports est un rapport qui a pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs.

Soient plusieurs rapports $\frac{a}{b} = q$, $\frac{a'}{b'} = q'$, $\frac{a''}{b''} = q''$, c'est-à-dire $a = b \times q$, $a' = b' \times q'$, $a'' = b'' \times q''$. On en déduit $a \times a' \times a'' = b \times b' \times b'' \times q \times q' \times q''$, ou, ce qui revient au même,

$$\frac{a \times a' \times a''}{b \times b' \times b''} = q \times q' \times q'';$$

ou enfin, suivant la règle énoncée,

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} \times \frac{a''}{b''} = \frac{a \times a' \times a''}{b \times b' \times b''}.$$

148. Remarque. — *On élève un rapport à une puissance en élevant ses deux termes à cette puissance.*

149. Quotient de deux rapports. — *Le quotient exact de deux rapports s'obtient en multipliant le rapport dividende par le rapport diviseur renversé.*

Ainsi, le quotient exact $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$, car si on multiplie $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ par le diviseur $\frac{c}{d}$, on obtient

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times d \times c}{b \times c \times d} = \frac{a}{b}$$

après simplification.

150. Remarque. — En résumé, les règles de calcul des rapports sont identiques aux règles de calcul des fractions ordinaires.

151. Théorème. — *Quand on a une suite de rapports égaux, on obtient un rapport égal à chacun d'eux en faisant la somme des numérateurs et la somme des dénominateurs.*

En d'autres termes, si l'on a

$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = q$, q désignant le quotient exact, on

a aussi $q = \frac{a + a' + a''}{b + b' + b''}$.

En effet, on a $a = b \times q$, $a' = b' \times q$, $a'' = b'' \times q$, ou, en ajoutant, $a + a' + a'' = (b + b' + b'') \times q$, ce qui signifie aussi que l'on a

$$q = \frac{a + a' + a''}{b + b' + b''}.$$

152. Remarque. — On prouverait de même que *si l'on a deux rapports égaux, on obtient un rapport égal en faisant la différence des numérateurs et la différence des dénominateurs ;* ce qui s'exprime par les égalités

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a - c}{b - d}.$$

Proportions.

153. Définitions. — On appelle *proportion* l'égalité de deux rapports. Ainsi, en écrivant $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on écrit une proportion : a et d s'appellent les *extrêmes*, b et c les *moyens* de la proportion.

Quatre nombres a, b, c, d, *donnés dans un ordre déterminé*, sont en proportion quand on a

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

on dit encore que a et d sont les *extrêmes*, b et c les *moyens*.

154. Théorème. — *Dans toute proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Soit la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. De cette égalité on déduit, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{b \times d}.$$

Les dénominateurs étant égaux, pour qu'il y ait égalité il faut alors que les numérateurs soient aussi égaux, ce qui donne $a \times d = b \times c$, et la proposition est démontrée.

155. Théorème. — *Si, entre quatre nombres a, b, c, d, donnés dans un certain ordre, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre nombres sont en proportion.*

Si l'on a $a \times d = b \times c$, on a aussi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, car si l'on divise les deux membres de la première égalité par $b \times d$ et que l'on simplifie, on obtient la deuxième.

156. Remarque. — L'égalité $a \times d = b \times c$ peut s'écrire sous les différentes formes

$$d \times a = b \times c, \qquad a \times d = c \times b, \qquad d \times a = c \times b,$$

auxquelles correspondent les proportions

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \qquad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

Il en résulte que *si l'on a une proportion, on obtient une nouvelle proportion :* 1° *en changeant les extrêmes;* 2° *en changeant les moyens;* 3° *en changeant à la fois les moyens et les extrêmes*

157. Théorème. — *Quand on a une proportion, on obtient de nouvelles proportions :* 1° *en ajoutant les dénominateurs aux numérateurs, ou en retranchant les dénominateurs des numérateurs,* 2° *en ajoutant les numérateurs aux dénominateurs ou en retranchant les numérateurs des dénominateurs.*

1° De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on déduit, en ajoutant l'unité aux deux membres, et en effectuant ces opérations,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d};$$

on aurait de même, en retranchant l'unité des deux membres,

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

2° La proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ conduit à la proportion $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$, en changeant à la fois les moyens et les extrêmes. Mais alors, en vertu de 1°, on a

$$\frac{d \pm c}{c} = \frac{b \pm a}{a},$$

ou, en changeant encore les moyens et les extrêmes,

$$\frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}.$$

158. Corollaire. — Si l'on divise membre à membre les égalités

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad \text{et} \qquad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

on obtient une nouvelle égalité,

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

159. Quatrièmes proportionnelles. — Lorsque quatre nombres, *écrits dans un ordre déterminé*, forment une proportion, on dit que chacun d'eux est une *quatrième proportionnelle* aux trois autres.

Si trois des quatre nombres sont donnés, et si l'on donne en même temps l'ordre dans lequel les nombres sont supposés écrits, il est aisé d'avoir l'autre nombre. Appelons, en effet, x ce nombre, a, b, c les trois autres, et supposons les nombres écrits dans l'ordre a, b, x, c; on aura $\frac{a}{b}=\frac{x}{c}$. Multipliant alors les deux membres de cette égalité par c, et simplifiant le dernier rapport, il vient

$$x=\frac{a\times c}{b}.$$

160. Moyennes proportionnelles. — On dit qu'un nombre est la *moyenne proportionnelle* entre deux autres, quand il existe une proportion dont les moyens sont égaux à ce nombre et les extrêmes aux deux autres.

D'après cela la moyenne proportionnelle, x, entre deux nombres a et b, est définie par l'égalité

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b},$$

qui donne $x^2=a\times b$, en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens.

Il en résulte que *la moyenne proportionnelle entre deux nombres est un autre nombre dont le carré est égal au produit des deux nombres considérés.*

La moyenne proportionnelle, x, entre a et b est donc la racine carrée du produit $a\times b$. Pour cette raison, l'égalité $x^2=a\times b$ s'écrit encore

$$x=\sqrt{a\times b},$$

ce qui s'énonce x égale racine carrée de $a \times b$. Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle un *radical*.

Grandeurs proportionnelles.

161. Mesure des grandeurs. — Lorsqu'on veut *mesurer* une grandeur, on prend une autre grandeur de même espèce appelée *unité*, et l'on cherche combien de fois la grandeur à mesurer contient l'unité ou une partie de l'unité partagée en parties égales.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de mesurer une longueur, et que cette longueur contienne exactement 3 fois l'unité : on dit alors qu'elle est mesurée par le nombre 3. Supposons qu'au lieu de contenir exactement l'unité, elle contienne un certain nombre de fois l'unité, ce nombre pouvant être 0, plus un reste plus petit que l'unité. Pour la mesurer, on partage alors l'unité en un certain nombre de parties égales, 5 par exemple, et l'on cherche combien de fois la cinquième partie de l'unité est contenue dans le reste. Si, par exemple, elle y est contenue 4 fois, la grandeur à mesurer contient 3 unités, plus $\frac{4}{5}$ d'unités. On dit alors qu'elle est mesurée par le nombre fractionnaire

$$3 + \frac{4}{5} = \frac{3 \times 5}{5} + \frac{4}{5} = \frac{15 + 4}{5} = \frac{19}{5},$$

ou qu'elle contient les 19 cinquièmes de l'unité.

Mais il peut arriver qu'en divisant l'unité en autant de parties égales que l'on veut, une des parties de l'unité ne soit jamais contenue un *nombre exact* de fois dans la grandeur à mesurer ; on dit alors que celle-ci est *incommensurable* avec son unité. Dans tout ce qui suit il ne sera question que de grandeurs *commensurables* avec l'unité.

162. Rapport de deux grandeurs de même espèce. — On appelle *rapport* de deux grandeurs, A et B, de même espèce, le nombre qui mesure la première quand on prend la deuxième pour unité. On représente ce rapport par le symbole $\frac{A}{B}$, qu'on énonce A *sur* B.

163. Théorème. — *Le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au quotient exact du nombre qui mesure la première par le nombre qui mesure la deuxième à l'aide de la même unité.*

Supposons, par exemple, qu'une même unité, C, soit contenue 3 fois dans A et 5 fois dans B : il s'agit alors de prouver que $\frac{A}{B} = \frac{3}{5}$.

En effet, C étant contenu 5 fois dans B, cela veut dire que C est la cinquième partie de B ; mais alors A contenant C 3 fois, cela voudra dire que A contient 3 fois la cinquième partie de B, et, par conséquent, que si l'on prend B pour unité, le nombre qui mesure A est $\frac{3}{5}$. Or, par définition, ce nombre est le rapport $\frac{A}{B}$: on a donc bien $\frac{A}{B} = \frac{3}{5}$, ce qui démontre la proposition.

164. Définitions. — On dit que deux grandeurs variables sont *directement proportionnelles* lorsque le rapport de deux valeurs quelconques de la première est égal au rapport des deux valeurs correspondantes de la deuxième.

On dit que deux rapports sont *inverses* l'un de l'autre, quand l'un d'eux est égal à l'autre renversé. Par exemple, $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{3}$ sont deux rapports inverses l'un de l'autre. Il est clair que le produit de deux rapports inverses est égal à 1.

On dit que deux grandeurs variables sont *inversement proportionnelles* quand le rapport de deux valeurs quelconques de la première est égal au rapport inverse des deux valeurs correspondantes de la deuxième.

165. Théorème. — 1° *Si deux grandeurs sont directement proportionnelles, lorsque l'une d'elles devient* 2, 3, 4, ... *fois plus grande ou plus petite, l'autre devient le même nombre de fois plus grande ou plus petite, et réciproquement.*

2° *Si deux grandeurs sont inversement proportionnelles, lorsque l'une d'elles devient* 2, 3, 4,... *fois plus grande ou plus petite, l'autre devient le même nombre de fois plus petite ou plus grande, et réciproquement.*

Ces deux propositions sont des conséquences immédiates des définitions du numéro 164 et de la proposition démontrée numéro 163.

TABLE

	Pages
Numération décimale	1
Addition des nombres entiers	5
Soustraction des nombres entiers	7
Multiplication des nombres entiers	10
Division des nombres entiers	19
Caractères de divisibilité	26
Plus grand commun diviseur	29
Plus petit multiple commun	34
Notions sur les nombres premiers	36
Fractions ordinaires	42
Fractions décimales	54
Carré et racine carrée	60
Rapports et proportions	67

[11]

ALGÈBRE

LIVRE I

CALCUL ALGÉBRIQUE

Emploi des lettres pour représenter les inconnues. — Problèmes simples.

1. But de l'Algèbre. — L'Algèbre a pour but la *simplification* et la *généralisation* des questions que l'on peut se proposer sur les nombres. Elle atteint ce double but par l'emploi de lettres, pour représenter les nombres, et par l'emploi de signes, pour indiquer les opérations à effectuer sur ces nombres.

2. Signes employés en Algèbre. — Les signes employés en Algèbre sont les mêmes que ceux qui sont employés en Arithmétique. Nous allons les rappeler brièvement en passant en revue les diverses opérations définies en Arithmétique, et que l'on peut effectuer sur les nombres.

Addition. — L'addition s'indique par le signe +, qu'on énonce *plus*.

Soustraction. — La soustraction s'indique par le signe —, qu'on énonce *moins*.

Multiplication. — La multiplication s'indique par le signe $\times$, qu'on énonce *multiplié par*. Dans un but de simplification on supprime cependant presque toujours ce signe, en Algèbre, et on le remplace par un point. Ainsi, au lieu d'écrire 3×4, on écrit 3.4, qu'on énonce encore 3 multiplié par 4. Lorsque les facteurs d'un produit sont représentés par des lettres, on supprime même le point qui sépare les facteurs deux à deux, et l'on se borne à écrire ces facteurs les uns à la suite des autres. Ainsi *abc* signifiera $a \times b \times c$.

Division. — La division s'indique, soit par le signe :, qu'on énonce *divisé par* et qu'on place entre le dividende et le diviseur, soit par une fraction ayant pour numérateur le dividende et pour dénominateur le diviseur : on emploie généralement, de préférence, la forme fractionnaire.

Puissances. — La puissance d'un nombre s'indique, comme en arithmétique, au moyen de l'*exposant.* Ainsi 3^4, qu'on lit 3 *exposant* 4 ou 3 *puissance* 4, indique le produit de 4 facteurs égaux à 3. Le chiffre 4 est l'*exposant* ou le *degré* de la puissance.

Plus généralement, si l'on représente le nombre et l'exposant chacun par une lettre, on a le symbole a^m, qu'on lit *a puissance m.*

Racines. — On appelle *racine carrée* d'un nombre un autre nombre dont le carré est égal au nombre donné. On définit de même la *racine cubique*, la *racine quatrième*, etc.

La racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre a s'indique par le symbole $\sqrt[m]{a}$, qu'on énonce racine $m^{\text{ième}}$ de a. Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle un *radical*, et m est l'*indice* du radical. Dans le cas de la racine carrée, m est égal à 2, mais on ne l'écrit pas. Ainsi, on écrira $\sqrt{a}$ pour racine carrée de a.

Egalités et inégalités. — L'*égalité* entre deux nombres s'indique en séparant ces deux nombres par le signe $=$, qu'on énonce *égale.* On écrira donc, par exemple, $a = b$, et l'on dira *a égale b* ; a s'appelle le *premier membre* de l'égalité et b le *second membre.*

Pour écrire qu'un nombre a est supérieur à un nombre b, on écrit $a > b$, et l'on dit *a supérieur à b*, ou *a plus grand que b* ; pour indiquer, de même, qu'un nombre a est inférieur à un nombre b, on écrit $a < b$, et l'on dit *a inférieur à b*, ou *a plus petit que b.* Dans les deux cas a s'appelle le *premier membre* et b le *second membre* de l'inégalité.

On a quelquefois à exprimer soit qu'un nombre a est supérieur ou égal à b, soit qu'il est inférieur ou égal à b, soit qu'il est différent de b. On écrit alors $a \geq b$, $a \leq b$, $a \neq b$, et l'on dit : *a supérieur ou égal à b* ; *a inférieur ou égal à b* ; *a différent de b.*

Parenthèses. — On emploie des parenthèses ( ) ou des crochets [ ] pour indiquer que des opérations sont supposées effectuées. Par exemple, quand on écrit $(3 + 4)5$, cela signifie que la *somme* $3 + 4$ *supposée effectuée* est multipliée par 5 ;

tandis que si l'on écrivait $3+4.5$, sans parenthèses, cela signifierait qu'à 3 on ajoute le produit 4.5.

On conçoit immédiatement, d'après cela, la différence de sens qu'il faut attribuer aux opérations qu'on indique en écrivant $(3+4).(5+6)$ ou $3+4.5+6$.

3. Emploi des lettres pour représenter les inconnues. — Il est évident que l'emploi des signes, en arithmétique ou en algèbre, simplifie considérablement le langage et l'écriture. Pour ne citer qu'un exemple, il est incontestable qu'il est plus simple d'écrire $(3+4).(5+6)$ que 3 plus 4, multiplié par 5 plus 6 ; de même il est plus simple de dire 3 plus 4, multiplié par 5 plus 6 que de dire j'ajoute 4 à 3, 6 à 5 et je multiplie le premier résultat par le second.

Si le langage et l'écriture sont simplifiés par l'emploi des signes, ils le sont bien plus encore quand, en même temps que les signes pour indiquer les opérations à effectuer sur les nombres, on emploie des lettres pour représenter ces nombres. Nous en avons vu incidemment des exemples en arithmétique (V. *Arithm.*, nos 141 et suivants) et nous en verrons des exemples nombreux dans la suite. Pour le moment, nous commencerons par montrer, sur des exemples, comment on peut simplifier la solution d'un problème en employant des lettres pour représenter les inconnues.

4. Problème I. — *Quel nombre faut-il ajouter à* 13 *et à* 57 *pour que la deuxième somme soit le double de la première ?*

Solution sans lettres. — La première somme est égale à 13 plus le nombre inconnu. Or, pour doubler une somme, il suffit de doubler chacune de ses parties. Le double de la première somme est donc égal au double de 13, c'est-à-dire à 26, plus le double du nombre inconnu. Cette nouvelle somme doit être égale à 57 plus le nombre inconnu. Autrement dit, si de 26 plus 2 fois le nombre inconnu on retranche la somme 57 plus le nombre inconnu, la différence est nulle. Mais la différence de deux nombres ne change pas quand on retranche un même nombre à chacun d'eux (*Arithm.*, 14, 1°). Il en résulte que l'on obtient encore une différence nulle en retranchant 57 de la somme qu'on obtient quand on ajoute une seule fois le nombre inconnu à 26. Pour une raison toute pareille, la différence est encore nulle quand on retranche du nombre inconnu la différence $57 - 26$; ce qui

revient à dire que le nombre inconnu est égal à $57-26$ ou à 31. Ainsi, le nombre cherché est 31. On vérifie, du reste, que l'on a bien le nombre cherché en observant que

$$13+31=44,$$

dont le double 88 est égal à $57+31$.

Solution avec une lettre. — Soit x l'inconnue du problème. La somme de 13 et de x est représentée par $13+x$; son double est donc $2.(13+x)=2\times 13+2x=26+2x$, et l'on doit avoir

$$26+2x=57+x.$$

En retranchant x de part et d'autre, il reste

$$26+x=57,$$

ce qui montre que x n'est autre chose que la différence entre 57 et 26, c'est-à-dire que l'on a

$$x=57-26=31.$$

La simple comparaison des deux solutions suffit pour montrer que tout l'avantage revient à la seconde.

5. Problème II. — *Les fortunes de deux personnes sont respectivement* 423 000^{fr} *et* 125 000^{fr}. *Chacune d'elles met de côté* 4000^{fr} *par an : au bout de combien de temps la fortune de la première sera-t-elle triple de celle de la deuxième ?*

Solution sans lettres. — La différence actuelle entre la fortune de la première et le triple de la fortune de la deuxième est $423\,000-375\,000=48\,000^{fr}$. Au bout d'un an, la fortune de la première est devenue

$$423\,000+4\,000=427\,000^{fr},$$

et la fortune de la deuxième $125\,000+4\,000=129\,000^{fr}$. Le triple de la fortune de la deuxième est donc 387 000 ^{fr}, et la différence entre la fortune de la première et le triple de la fortune de la deuxième est

$$427\,000-387\,000=40\,000^{fr}.$$

Elle était de 48 000^{fr} une année avant, elle a donc diminué de 8 000^{fr} en un an. Au bout de 2 ans elle aura donc diminué de $2\times 8\,000=16\,000^{fr}$, et ainsi de suite. Comme elle doit être nulle, le temps cherché, exprimé en années, sera égal à autant de fois 8 000 que ce nombre est contenu dans 48 000, c'est-à-dire qu'il sera égal au quotient

$$48\,000:8\,000=6 \text{ ans}.$$

Ainsi, la fortune de la première sera le triple de celle de la deuxième au bout de six ans.

Solution avec une lettre. — Reprenons maintenant le même problème en désignant par une lettre, x, le temps inconnu exprimé en années. La fortune de chaque personne s'accroissant de 4000fr par an, au bout de x années elle s'accroît de 4000 x. Mais au bout de ce temps la fortune de la première devant être le triple de celle de la deuxième, on doit avoir

$$423000 + 4000x = 3\,(125000 + 4000x)\ ;$$

ce qui peut s'écrire

$$423000 + 4000x = 375000 + 12000x.$$

En retranchant 375000 et $4000x$ de part et d'autre, il vient

$$48000 = 8000x,$$

ce qui montre que x est le quotient, 6, de la division de 48000 par 8000, ou de 48 par 8.

6. Problème III. — *Trouver deux nombres connaissant leur somme*, 32, *et leur quotient exact*, 7.

Solution sans lettres. — Le quotient étant 7, cela veut dire que le plus grand nombre est égal à 7 fois le plus petit. Mais alors la somme, 32, du plus grand et du plus petit sera égale à 7 fois le plus petit plus le plus petit, c'est-à-dire à 8 fois le plus petit. Il en résulte que le plus petit nombre cherché est $32 : 8 = 4$ et, par suite, que le plus grand est $4 \times 7 = 28$.

Solution avec des lettres. — Appelons x le plus petit nombre et y le plus grand. On doit avoir

$$y = 7x$$

et

$$y + x = 32.$$

Cette dernière égalité, si l'on tient compte de la première, s'écrit

$$8x = 32,$$

et donne $x = \frac{32}{8} = 4$; il en résulte $y = 7 \times 4 = 28$.

Emploi des lettres pour représenter les données. Formules algébriques.

7. Emploi des lettres pour représenter les données. — Les problèmes qu'on vient de résoudre mettent bien

en évidence les avantages qui résultent de l'emploi des lettres pour représenter les inconnues d'un problème. Il est donc naturel de généraliser ce mode de représentation et de l'étendre aux données elles-mêmes. Il ressortira très nettement de considérations ultérieures que l'on obtient, de cette manière, des résultats plus généraux, et que l'on peut, en quelque sorte, condenser les divers cas d'une même question. Mais nous pouvons, dès à présent, et en traitant quelques exemples, donner une idée des avantages que l'on peut tirer de l'emploi des lettres pour représenter les données et les inconnues.

Reprenons d'abord le problème I du n° 4, et représentons par a le premier nombre, par b le second, et par x le nombre inconnu. D'après l'énoncé, si l'on ajoute x à chacun des nombres, le double du premier résultat doit être égal au second. On doit donc avoir

$$2(a+x) = b+x;$$

ce qui peut encore s'écrire, en effectuant la multiplication indiquée au premier membre,

$$2a+2x = b+x.$$

Retranchant alors successivement x et $2a$ des deux membres, on obtient finalement

$$x = b-2a.$$

En rapprochant cette solution et le résultat qui en est la conséquence de l'une quelconque des solutions et des résultats obtenus au n° 4, nous observons d'abord que la nouvelle solution est plus simple soit sous le rapport du langage, soit sous le rapport de l'écriture. Mais nous observons ensuite et surtout que, tandis que les deux solutions du n° 4 nous ont donné comme résultat final un nombre, 31, ne laissant aucune trace des opérations qu'on a dû faire pour l'obtenir, la solution actuelle nous donne un résultat général, indiquant dans une seule égalité tous les calculs à effectuer pour résoudre tous les problèmes du même genre dans lesquels les nombres seuls diffèrent. L'égalité $x = b-2a$, lue en langage ordinaire, nous indique en effet que le nombre inconnu est égal à la différence entre le second nombre et le double du premier ; de sorte que nous avons, en réalité, résolu *tous* les problèmes compris dans l'énoncé suivant :

Etant donnés deux nombres quelconques, quel nombre faut-il ajouter à chacun d'eux pour que le double du plus petit résultat soit égal à l'autre résultat ?

En appelant a le plus petit nombre, b le plus grand et x le nombre inconnu, on a toujours

$$x = b - 2a,$$

et il n'y a plus, pour calculer x, qu'à remplacer a par le plus petit nombre, b par le plus grand, et à effectuer les opérations indiquées.

En appliquant à l'exemple numérique du n° 4, on a

$$x = 57 - 2.13 = 57 - 26 = 31.$$

Nous pouvons ajouter une autre remarque. Supposons qu'on veuille poser le même problème en changeant les données. L'égalité $x = b - 2a$ montre qu'il ne sera pas possible de prendre les deux nombres au hasard ; car on ne peut, pour le moment, effectuer la soustraction $b - 2a$ que si b est plus grand que $2a$, c'est-à-dire si le plus grand nombre est supérieur au double du plus petit.

Reprenons, maintenant, le problème II du n° 5 et représentons par les lettres a, b, c, x les fortunes respectives des deux personnes, la somme annuelle mise de côté et le temps inconnu. En traduisant l'énoncé, on voit que l'on doit avoir

$$a + cx = 3(b + cx),$$

que l'on peut écrire

$$a + cx = 3b + 3cx.$$

En retranchant successivement cx et $3b$ de part et d'autre, il vient

$$a - 3b = 2cx,$$

ce qui montre que x est le quotient de la division de $a - 3b$ par $2c$, c'est-à-dire que l'on a

$$x = \frac{a - 3b}{2c}.$$

De sorte que pour avoir x il n'y a qu'à remplacer a, b, c par leurs valeurs respectives, 423 000, 125 000, 4 000, et à effectuer les calculs indiqués.

Mais, comme dans l'exemple précédent, l'égalité

$$x = \frac{a - 3b}{2c}$$

ne résout pas seulement le problème énoncé ; elle résout tous les problèmes compris dans l'énoncé suivant :

On donne les fortunes respectives de deux personnes et une somme annuelle que chacune d'elles met de côté ; trouver au bout de combien de temps la fortune de la plus riche sera le triple de celle de la moins riche.

8. Formules algébriques. — Les égalités obtenues plus haut,

$$x = b - 2a, \qquad x = \frac{a - 3b}{2c},$$

qui permettent de calculer le nombre x quand on connaît les nombres que représentent les lettres a, b, c, s'appellent des *formules algébriques*.

Ainsi, une formule algébrique est une égalité entre des nombres et des lettres représentant des nombres connus ou inconnus, et qui renferme l'indication des calculs à effectuer pour avoir l'un des nombres quand on connaît tous les autres.

La résolution d'un problème d'algèbre conduit toujours à une ou à plusieurs formules. Nous en avons vu des exemples dans le numéro précédent ; les questions dont nous allons nous occuper dans le numéro suivant et qu'on appelle des *questions d'intérêt* nous en fournissent d'autres exemples.

9. Formules d'intérêts simples. — Quand une personne possédant un capital en cède la jouissance temporaire à une autre personne, on appelle *intérêt* du capital une indemnité conventionnelle versée par la deuxième personne à la première. On dit alors que le capital est *placé* à intérêt et on appelle *durée du placement* le *temps* pendant lequel le propriétaire renonce à la jouissance de son capital moyennant les intérêts.

Par convention, l'intérêt est directement proportionnel au capital, et on appelle *taux* de l'intérêt, l'intérêt d'une somme déterminée, généralement d'une somme de 100^{fr} pendant un an.

Toutes les questions d'intérêt se résolvent au moyen d'une formule unique que nous allons faire connaître.

Représentons, pour cela, par des lettres le capital placé, l'intérêt de ce capital, le taux et le temps, et soient :

a la lettre qui représente le capital ;

I la lettre qui représente l'intérêt pendant la durée du placement ;

r la lettre qui représente le taux pour 100^{fr} ;

t le temps exprimé en années.

L'intérêt de 100^{fr} au bout d'un an étant r, celui de

1fr sera $\frac{r}{100}$, et celui de a francs sera $\frac{ra}{100}$: ceci résulte de ce que l'intérêt est directement proportionnel au capital (*Arithm.*, 165). Puisque l'intérêt de a francs au bout d'un an est $\frac{ra}{100}$, l'intérêt de la même somme au bout de t années sera $\frac{rat}{100}$, car l'intérêt est aussi directement proportionnel au temps.

On a donc, entre les nombres représentés par les lettres a, I, r, t, l'égalité

$$I = \frac{art}{100}. \qquad (1)$$

C'est cette égalité qui constitue ce qu'on appelle la formu e des intérêts simples. On peut lui donner trois autres formes.

1° En multipliant les deux membres par 100 et les divisant ensuite par le produit rt, on obtient

$$a = \frac{100\,I}{rt}. \qquad (2)$$

2° En multipliant toujours les deux membres par 100 et les divisant ensuite par at, on obtient

$$r = \frac{100\,I}{at}. \qquad (3)$$

3° Enfin, en multipliant encore les deux membres par 100 et les divisant ensuite par ar, on obtient

$$t = \frac{100\,I}{ar}. \qquad (4)$$

Cela fait en somme quatre formules qui permettent de résoudre tous les problèmes compris dans l'énoncé suivant :

Connaissant trois quelconques des quatre nombres I, a, r, t, *trouver le quatrième.*

Si l'inconnue est l'intérêt, on l'obtiendra par la formule (1) ; si l'inconnue est le capital, on l'obtiendra par la formule (2) ; si l'inconnue est le taux, on l'obtiendra par la formule (3) ; enfin, si l'inconnue est le temps, on l'obtiendra par la formule (4).

Par exemple, supposons que l'on demande *à quel taux il faut placer, pendant* 3 *ans, un capital de* 10 000fr *pour obtenir* 975fr *d'intérêts.*

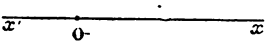
L'inconnue étant le taux, il faudra se servir de la formule (3). Il suffira d'ailleurs, pour obtenir le taux, de remplacer, dans cette formule, 1 par 975, a par 10 000, t par 3, et d'effectuer les opérations indiquées. On obtient ainsi

$$r = \frac{100 \times 975}{10000 \times 3} = 3{,}25.$$

Le taux cherché est donc $3^{fr},25$ pour 100 francs.

Nombres positifs et nombres négatifs.

10. Emploi des nombres positifs ou négatifs pour la représentation des grandeurs susceptibles d'être portées dans un sens ou dans le sens opposé. — Supposons que l'on demande de porter plusieurs longueurs données sur une droite indéfinie $x'x$ et à partir d'un point fixe, O, de cette droite. Chacune de ces longueurs sera déterminée par le nombre qui la mesure à l'aide d'une longueur choisie une fois pour toutes et prise pour unité. Mais si on veut en placer une quelconque sur la droite $x'x$, à partir du point O, on reconnaît, au simple examen, que cette opération n'est pas déterminée ; car il n'y a aucune raison de porter cette longueur à droite du point O, plutôt qu'à gauche. Pour que l'opération soit bien déterminée, il faut donc que l'on indique *le sens* dans lequel elle doit être portée ; et il faut, bien entendu, qu'il en soit ainsi pour toutes les longueurs que l'on doit porter à partir du point O, sur la droite $x'x$.



Il serait fastidieux, en algèbre, de dire par exemple : une longueur de 4 mètres portée à droite du point O, une longueur de 3 mètres portée à gauche, etc. : cela serait contraire à l'un des buts de l'algèbre, à la simplification de l'écriture et du langage. D'ailleurs, toute opération a été indiquée jusqu'ici par un signe. On a été ainsi conduit à *convenir* de faire précéder du signe + le nombre qui mesure une longueur portée dans un sens déterminé, à droite du point O par exemple, et du signe — le nombre qui mesure une longueur portée dans le sens opposé.

Alors, au lieu de dire des longueurs de 2, 3, 4 mètres por-

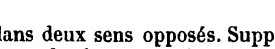
tées à droite du point O, on dira des longueurs $+2$, $+3$, $+4$ (plus 2, plus 3, plus 4) ; au lieu de dire des longueurs 5, 6, 7, portées à gauche du point O, on dira des longueurs -5, -6, -7 (moins 5, moins 6, moins 7).

Généralisant alors cette convention, afin de se conformer à l'esprit de l'algèbre, on a été conduit à l'étendre à toutes les grandeurs susceptibles d'être comptées dans un sens ou dans le sens opposé : telles sont les temps, les vitesses, les degrés thermométriques, etc.

Temps. — Un événement quelconque peut être *postérieur* ou *antérieur* à un instant donné que l'on regarde comme fixe et qu'on appelle l'*origine* des temps. Supposons que l'on connaisse le nombre d'unités de temps écoulées entre l'origine des temps et l'instant où se produit l'événement considéré. Le temps écoulé est une grandeur susceptible d'être comptée dans deux sens opposés, dans l'avenir ou dans le passé. Convenons, pour fixer les idées, de faire précéder le nombre qui mesure le temps du signe $+$ si l'événement est postérieur à l'instant origine, du signe $-$ s'il est antérieur au même instant.

Dans ces conditions, il est clair qu'il y aura tout avantage à dire que l'événement s'est produit au temps $+5$ ou au temps -3, plutôt que de dire : l'événement s'est produit 5 unités de temps après l'origine des temps, ou 3 unités de temps avant cette origine.

Vitesse. — Quand un point se meut sur une droite $x'x$, à partir d'un point O de cette droite, il peut se mouvoir soit de gauche à droite, soit de droite à gauche. L'espace qu'il parcourt est donc une grandeur susceptible d'être portée dans deux sens opposés. Supposons que le point décrive toujours des longueurs égales pendant des temps égaux : on appelle alors *vitesse* du point en mouvement l'espace parcouru pendant l'unité de temps, comptée à partir de n'importe quel instant. Cette vitesse étant un espace parcouru est une grandeur susceptible d'être portée dans deux sens opposés. Il y aura donc avantage à affecter le nombre qui la mesure du signe $+$ quand le déplacement du point s'effectue dans un sens déterminé, et du signe $-$ dans le cas contraire.



Par exemple, si l'on convient de mettre le signe $+$ quand

le mouvement a lieu de gauche à droite, on saura que si la vitesse d'un point sur la droite $x'x$ est de -2 mètres par seconde, cela signifiera que le point se déplace de *droite à gauche*, et parcourt 2 mètres par seconde.

Degrés thermométriques. — On sait que la tige d'un thermomètre est divisée en parties égales appelées *degrés*, et que l'on évalue la température à un instant donné au moyen du nombre de degrés compris entre une division fixe, prise pour origine, et la division qui correspond au niveau du liquide à cet instant. Comme le niveau du liquide peut être au-dessus ou au-dessous de la division prise pour origine, les degrés constituent une grandeur susceptible d'être portée dans deux sens opposés. On a donc été conduit à faire, pour les degrés, la même convention que pour les longueurs, les temps et les vitesses. Ainsi l'on dit une température de $+15$ degrés ou de -3 degrés, au lieu de dire 15 degrés au-dessus de zéro, 3 degrés au-dessous.

En résumé, pour définir complètement une grandeur d'espèce quelconque, susceptible d'être portée dans un sens ou dans le sens opposé, on a été conduit à faire usage des nombres définis en arithmétique et précédés du signe $+$ ou du signe $-$. On a appelé ces nombres des *nombres algébriques*, par opposition aux nombres ordinaires qu'on appelle *nombres arithmétiques*.

Les nombres algébriques se divisent d'ailleurs en nombres *positifs* et en nombres *négatifs*.

On appelle *nombre positif* tout nombre arithmétique précédé du signe $+$, et on appelle *nombre négatif* tout nombre arithmétique précédé du signe $-$.

Par exemple, $(+5)$ (*plus* 5) est un nombre positif, (-5) (*moins* 5) est un nombre négatif. Les parenthèses qui comprennent chacun de ces nombres ne sont pas indispensables et sont mises uniquement pour bien affirmer que le signe est inséparable du nombre arithmétique qu'il précède.

A tout nombre algébrique correspond un nombre arithmétique qu'on appelle la *valeur absolue* du nombre algébrique ; ainsi la valeur absolue de (-7) est 7 et celle de $(+5)$ est 5. Un nombre algébrique est *nul* quand sa valeur absolue est 0. Deux nombres algébriques qui ont la même valeur absolue et des signes contraires sont dits *égaux et de signes contraires*.

Après avoir donné les considérations qui ont conduit à l'introduction et à la définition des nombres algébriques, nous allons montrer qu'on peut effectuer sur ces nombres les mêmes opérations que sur les nombres arithmétiques.

Opérations sur les nombres positifs et sur les nombres négatifs.

Addition.

11. Somme de deux nombres. — Par définition, la *somme* de deux nombres algébriques a et b est un troisième nombre c qui a pour valeur absolue la somme ou la différence des valeurs absolues, suivant que les deux nombres sont de même signe ou de signes contraires ; son signe est le même que celui des deux nombres qui a la plus grande valeur absolue.

Si l'un des deux nombres a ou b est nul, c se réduit à celui qui n'est pas nul.

On représente la somme de deux nombres algébriques a et b par le symbole $a+b$, qu'on appelle une expression algébrique, et l'on exprime que c est la somme de a et de b en écrivant l'égalité

$$a+b=c.$$

D'après cela, on a :

$$(+7)+(+5)=+(7+5),$$
$$(-7)+(-5)=-(7+5),$$
$$(+7)+(-5)=+(7-5),$$
$$(-7)+(+5)=-(7-5),$$

la signification des symboles $(7+5)$ et $(7-5)$ étant la même qu'en arithmétique, c'est-à-dire que ces symboles représentent la somme ou la différence, *supposées effectuées*, de 7 et de 5.

12. Remarque I. — La somme de deux nombres égaux et de signes contraires est évidemment nulle.

13. Remarque II. — En vertu de la définition, si l'on a

$$a+b=c,$$

on a aussi

$$b+a=c;$$

donc *dans une somme de deux nombres algébriques, on peut intervertir l'ordre de ces deux nombres sans changer le résultat.*

14. Somme de plusieurs nombres. — On appelle somme de plusieurs nombres algébriques, a, b, c, ..., l, *donnés dans un ordre déterminé*, le nombre obtenu en ajoutant le second nombre au premier, le troisième nombre au résultat obtenu, et ainsi de suite jusqu'au dernier.

On représente cette somme par l'expression

$$a + b + c + \ldots + l,$$

et l'on dit que a, b, c, ..., l sont les termes de la somme.

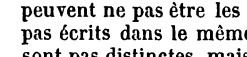
Par exemple, la somme $(-7) + (+4) + (-6)$ s'obtient en ajoutant $(+4)$ à (-7), ce qui donne (-3), puis en ajoutant (-6) à (-3), ce qui donne (-9) ; de sorte que l'on a

$$(-7) + (+4) + (-6) = (-9).$$

15. Remarque. — Il est clair, et cela résulte de la définition, que les deux sommes $a + b + c + d$ et $a + c + b + d$, bien que composées des mêmes termes, peuvent ne pas être les mêmes, parce que les termes ne sont pas écrits dans le même ordre. Nous prouverons qu'elles ne sont pas distinctes, mais cela n'est pas évident *a priori*.

Quelques considérations préliminaires éclairciront la démonstration de cette proposition fondamentale.

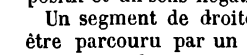
16. Définitions. — Lorsqu'un mobile se déplace sur une droite indéfinie $x'x$, il peut se déplacer soit dans le sens de la flèche, soit en sens contraire. Pour distinguer ces deux sens l'un de l'autre, nous donnerons à l'un d'eux, n'importe lequel, le nom de *sens positif* : l'autre sera appelé *sens négatif*.



Nous dirons aussi *direction positive* au lieu de *sens positif* et *direction négative* au lieu de *sens négatif*.

Une droite indéfinie sur laquelle on aura ainsi fixé un sens positif et un sens négatif sera appelée un *axe*.

Un segment de droite défini par deux points A et B peut être parcouru par un point mobile se déplaçant soit de A vers B soit de B vers A ; le point de départ du mobile sera appelé l'*origine* du segment et le point d'arrivée son *extrémité*. Nous conviendrons d'ailleurs, en nommant un segment, de placer au premier rang la lettre qui est à l'origine.



Par exemple, le segment BA sera un segment parcouru, par convention, de B vers A.

On appelle *direction* d'un segment celle qui va de son origine à son extrémité.

On dit qu'un segment est nul, quand sa longueur est nulle, c'est-à-dire quand l'origine et l'extrémité coïncident.

Lorsque plusieurs segments appartiennent au même axe $x'x$, la direction de chacun d'eux peut être soit la direction positive de l'axe, soit la direction opposée.

Nous appellerons *segments positifs* ceux dont la direction est la même que la direction positive de l'axe, et *segments négatifs* les autres. Les segments positifs et négatifs seront appelés des *segments algébriques*.

On dit que deux segments algébriques appartenant au même axe sont *égaux* quand, en faisant glisser l'un d'eux sur l'axe, on peut amener son origine et son extrémité à coïncider respectivement avec l'origine et avec l'extrémité de l'autre. Si, dans les mêmes conditions, l'origine et l'extrémité du premier segment coïncident respectivement avec l'extrémité et avec l'origine du second, les deux segments sont dits *égaux et de sens contraires*.

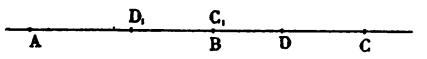
Deux segments égaux, appartenant au même axe, ne sont pas, d'après cela, considérés comme distincts ; de sorte que pour déterminer un segment sur un axe, il suffit d'en connaître la longueur et le sens. On se donne, d'ailleurs, la longueur d'un segment en se donnant le nombre qui mesure cette longueur avec une unité choisie une fois pour toutes. Pour indiquer le sens *on convient*, comme pour toutes les grandeurs susceptibles d'être portées dans deux sens opposés, de faire précéder le nombre arithmétique qui exprime la mesure du segment du signe + ou du signe —, suivant que le sens du segment coïncide avec le sens positif ou avec le sens négatif de l'axe auquel il appartient.

De cette manière, à tout segment sur un axe correspond un nombre algébrique de même espèce et un seul, et réciproquement. A deux segments égaux et de sens contraires, correspondent deux nombres algébriques égaux et de signes contraires, et réciproquement.

Nous dirons, d'après cela, qu'un segment algébrique sur un axe est *représenté* par un nombre algébrique.

17. Sommes de segments. — Lorsque deux segments

algébriques AB et CD appartiennent au même axe, on appelle *somme* de AB et de CD le segment algébrique qui a pour origine le point A et pour extrémité la position du point D après qu'on a fait glisser CD sur l'axe, de manière que son

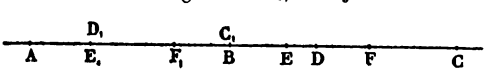


origine C coïncide avec l'extrémité B du premier segment. Si C_1D_1 est la nouvelle position du segment CD après cette opération, la somme des deux segments est le segment AD_1. Nous représenterons cette somme par l'expression AB + CD, et nous écrirons

$$AB + CD = AD_1.$$

Lorsque plusieurs segments algébriques situés sur le même axe sont donnés *dans un ordre déterminé*, on appelle *somme* de tous ces segments, le segment obtenu en ajoutant le second au premier, le troisième au segment ainsi obtenu, et ainsi de suite jusqu'au dernier. Cette suite d'opérations équivaut à déplacer tous les segments, de manière que l'origine de chacun d'eux coïncide avec l'extrémité de celui qui le précède.

Par exemple, si l'on a trois segments, AB, CD, EF, en ajoutant CD à AB on a le segment AD_1, en ajoutant EF à AD_1



on a le segment AF_1, qui est la somme des trois segments AB, CD, EF. On écrit alors

$$AF_1 = AB + CD + EF.$$

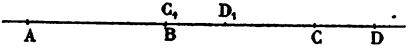
En particulier la somme de deux segments égaux et de sens contraires est nulle.

18. Théorème. — *Le nombre algébrique qui représente la somme de deux segments est égal à la somme des deux nombres algébriques qui représentent les deux segments.*

Il y a deux cas à examiner suivant que les deux segments sont de meme espèce ou d'espèces différentes, en convenant de dire que deux segments sont de même espèce quand ils sont tous deux positifs ou tous deux négatifs, et d'espèces différentes quand l'un est positif et l'autre négatif.

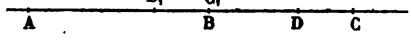
1° *Deux segments de même espèce.* — Pour fixer les idées,

supposons-les positifs et soient AB et CD ces deux segments. Il est clair que leur somme AD_1 est un segment de même espèce et que, d'après la définition même de la mesure, le nombre arithmétique qui mesure AD_1 est la somme des deux



nombres arithmétiques qui mesurent AB et C_1D_1, c'est-à-dire AB et CD. D'autre part, les segments étant de même espèce, c'est-à-dire positifs dans le cas actuel, sont représentés par des nombres de même espèce, c'est-à-dire positifs dans le cas actuel. Alors, puisque la valeur absolue du nombre qui représente la somme est la somme des valeurs absolues des deux autres, il résulte de la définition même de l'addition (11) que le nombre qui représente la somme des deux segments est égal à la somme des nombres qui représentent les deux segments.

2° *Deux segments d'espèces différentes.* — Soient AB et CD deux segments d'espèces différentes. Le simple examen de la figure montre que leur somme AD_1 est un segment de



même espèce que celui qui a la plus grande longueur, et dont la longueur est égale à la différence des longueurs des deux segments ; car la mesure de AD_1 ajoutée à la mesure de D_1C_1 ou de CD donne la mesure de AB, ce qui équivaut à dire que la longueur de AD_1 est la différence entre les longueurs de AB et de CD.

D'autre part, puisque par convention un segment algébrique est représenté par un nombre algébrique de même espèce, aux deux segments donnés correspondent deux nombres algébriques dont la somme a pour valeur absolue la différence des valeurs absolues, et dont l'espèce est la même que celle du nombre qui a la plus grande valeur absolue (11). Il en résulte que la somme de ces deux nombres représente bien la somme des deux segments.

19. Corollaire. — *Les deux opérations qui consistent à ajouter, d'une part, plusieurs segments situés sur le même*

axe, d'autre part, les nombres qui représentent ces segments, peuvent être considérées comme deux opérations équivalentes.

20. Théorème. — *Une somme de trois nombres algébriques ne change pas quand on intervertit l'ordre des deux derniers termes.*

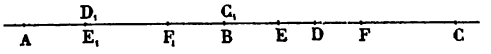
Il s'agit de prouver que l'on a

$$a + b + c = a + c + b,$$

a, b, c étant les trois nombres donnés. Pour cela, supposons que ces trois nombres représentent trois segments algébriques, AB, CD, EF; il suffira alors de prouver que l'on a

$$AB + CD + EF = AB + EF + CD.$$

Or, pour effectuer la première somme, il faut, d'après la définition, prendre $C_1D_1 = CD$, puis à la suite $E_1F_1 = EF$:



la somme est alors le segment AF_1. Mais AF_1 peut être considéré comme la somme de AB et de BF_1 ; d'autre part, on obtient BF_1 en portant CD_1, puis E_1F_1, ce qui revient à dire que BF_1 est la somme $C_1D_1 + E_1F_1$, c'est-à-dire $CD + EF$.

Ainsi, effectuer la première somme revient à ajouter à AB la somme $CD + EF$. Il en résulte qu'effectuer la deuxième somme revient à ajouter à AB la somme $EF + CD$. Or, la somme de deux nombres algébriques ne changeant pas (13) quand on intervertit l'ordre de ces deux nombres, il en est de même de la somme de deux segments algébriques, puisqu'il y a équivalence entre les deux opérations. On a donc

$$CD + EF = EF + CD,$$

et il en résulte alors qu'il revient au même d'effectuer la somme $AB + CD + EF$ ou d'effectuer la somme $AB + EF + CD$, puisque dans les deux cas on ajoute le même segment à AB. La proposition est ainsi démontrée.

21. Théorème. — *La somme de plusieurs nombres algébriques ne change pas quand on change l'ordre des termes à volonté.*

La démonstration de ce théorème est identique à celle qui a été donnée en arithmétique pour un produit de plusieurs nombres arithmétiques (*Arithm.*, 25).

22. Corollaire I. — *Dans une somme on peut, sans chan-*

ger la somme, remplacer deux ou plusieurs termes par leur somme effectuée, ou faire l'opération inverse.

En effet, on peut, sans rien changer à la somme, amener les ou le terme que l'on veut remplacer à occuper les premières places.

23. Corollaire II. — *Pour ajouter deux sommes, il suffit d'écrire les termes de la seconde à la suite des termes de la première, en séparant les termes consécutifs par le signe* $+$.

Si l'on a, par exemple, à ajouter $S_1 = a_1 + b_1$ à $S = a + b + c$, on a évidemment

$$S + S_1 = a + b + c + (a_1 + b_1);$$

mais on peut amener $(a_1 + b_1)$ au premier rang, ce qui revient à dire que

$$S + S_1 = (a_1 + b_1) + a + b + c,$$

ce qui revient au même que

$$S + S_1 = a_1 + b_1 + a + b + c;$$

car, pour calculer $(a_1 + b_1)$ il faut ajouter b_1 à a_1. Si, maintenant, on change de nouveau l'ordre des termes, on a bien, conformément à l'énoncé,

$$S + S_1 = a + b + c + a_1 + b_1.$$

Soustraction.

24. Définition. — *Retrancher* un nombre algébrique b d'un autre nombre algébrique a, c'est trouver un troisième nombre c tel que $a = b + c$; ce troisième nombre c s'appelle la *différence* entre a et b ou le *reste*.

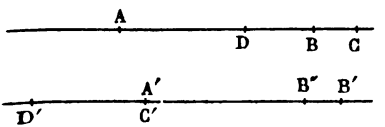
On exprime que c est la différence entre a et b en écrivant l'égalité

$$a - b = c,$$

et cette égalité est, par définition, équivalente à la suivante :

$$a = b + c.$$

25. Justification de la définition. — Pour justifier la définition, il faut prouver que le reste c existe et qu'il est unique. Nous ferons usage, pour cela, de la représentation des nombres algébriques par des segments algébriques, et il suffira alors de prou-



ver que *si l'on donne deux segments algébriques* AB *et* CD, *il en existe un troisième et un seul qui, ajouté à* CD, *donne un segment égal à* AB. A cet effet, prenons C'D' = CD, puis A'B' = AB ; le segment D'B' répond à la question, car on a

$$C'D' + D'B' = A'B' = AB ;$$

ainsi il en existe un.

Il n'en existe qu'un ; car supposons qu'il en existe un autre et ajoutons-le à C'D' ; il faut pour cela amener son origine à coïncider avec D', de sorte que si l'on appelle B'' son extrémité, la somme est C'D' + D'B''. Or, cette somme, qui est A'B'', doit être égale à AB, c'est-à-dire à A'B' ; donc A'B'' = A'B' ; par suite B'' coïncide avec B' et le segment D'B'' avec le segment D'B' ; ce qui démontre la proposition et ce qui justifie en même temps la définition de la soustraction.

26. Théorème. — *Pour retrancher un nombre b d'un autre nombre a, il suffit d'ajouter à a le nombre b' égal et de signe contraire à b.*

Reprenons en effet l'égalité

$$a = b + c,$$

qui exprime que c est la différence entre a et b. On peut l'écrire

$$a = c + b,$$

et si l'on ajoute b' de part et d'autre, on aura

$$a + b' = c + b + b'.$$

Mais (23) $$c + b + b' = c + (b + b'),$$

et, d'autre part, il est manifeste que la somme $b + b'$ de deux nombres égaux et de signes contraires est nulle ; donc

$$c + b + b' = c,$$

et par suite $$a + b' = c,$$

ce qui démontre la proposition.

D'après cela, on aura

$$(+7) - (+5) = (+7) + (-5) = +(7 - 5),$$
$$(+7) - (-5) = (+7) + (+5) = +(7 + 5),$$
$$(-7) - (+5) = (-7) + (-5) = -(7 + 5),$$
$$(-7) - (-5) = (-7) + (+5) = -(7 - 5).$$

27. Remarque. — Si l'on rapproche ce théorème de la définition de la soustraction, c'est-à-dire si l'on rapproche les deux égalités $a + b' = c$ et $a - b = c$, on est conduit à considérer comme équivalents les deux symboles $-b$ et $+b'$; on est donc conduit à *convenir que le signe* —

placé devant un nombre revient à remplacer ce nombre par le nombre égal et de signe contraire.

Si nous adoptons cette nouvelle convention et si a, b, c, d sont des nombres quelconques, on comprend immédiatement la signification de l'une quelconque des expressions

$$+a-b-c+d,$$
$$-a-b+c+d,$$

que l'on a obtenues en écrivant ces nombres à la suite les uns des autres et en faisant précéder chacun d'eux du signe + ou du signe —.

Pour calculer ou *effectuer* la première expression il faut ajouter à a le nombre égal et de signe contraire à b, puis ajouter le nombre égal et de signe contraire à c au résultat obtenu, et ainsi de suite. De même pour calculer la deuxième il faut ajouter le nombre égal et de signe contraire à b au nombre égal et de signe contraire à a, et ainsi de suite.

De telles expressions s'appellent des *sommes algébriques*. Ainsi on appelle *somme algébrique*, des nombres quelconques écrits à la suite les uns des autres et précédés chacun du signe + ou du signe —. Quand le premier nombre est précédé du signe +, on s'abstient d'écrire ce signe.

Les considérations qui ont conduit à la définition d'une somme algébrique montrent clairement que l'on peut ramener les sommes algébriques aux sommes ordinaires et que, dès lors, les propriétés établies (21, 22, 23) pour les sommes ordinaires s'étendent aux sommes algébriques.

28. Théorème. — *Deux sommes algébriques composées des mêmes nombres avec des signes respectivement contraires définissent deux nombres égaux et de signes contraires.*

Rappelons d'abord que deux nombres égaux et de signes contraires ont une somme nulle (12). Réciproquement, si la somme $S+S_1$ de deux nombres est nulle, S et S_1 sont égaux et de signes contraires, puisqu'il n'y a qu'un seul nombre qui, ajouté à S, donne 0 (25), et que le nombre S_1 remplit ces conditions.

Cela posé, soient

$$S = a-b+c-d-e,$$
$$S_1 = -a+b-c+d+e.$$

Si nous ajoutons ces deux égalités en groupant convenablement les termes, ce qui est permis (21), et en observant que

l'on peut remplacer deux termes quelconques par leur somme effectuée (22), nous aurons

$$S + S_1 = (a - a) + (b - b) + (c - c) + (d - d) + (e - e).$$

Comme $(a - a)$, $(b - b)$, etc. sont nuls, il vient

$$S + S_1 = 0,$$

ce qui prouve que S et S_1 sont de signes contraires.

29. Théorème. — *Pour retrancher une somme algébrique* S_1 *d'un nombre* S *qui peut être lui-même une somme algébrique, il suffit d'écrire les termes de* S_1 *à la suite de* S *en changeant le signe de chacun d'eux.*

Soit en effet $S_1 = -a - b + c - d + e$; si S'_1 est le nombre égal et de signe contraire à S_1, on vient de voir que $S'_1 = a + b - c + d - e$.

D'autre part, on a vu (26) que $S - S_1 = S + S'_1$, et alors, d'après la règle d'addition (23), on a bien

$$S - S_1 = S + a + b - c + d - e.$$

Multiplication.

30. Définition. — Par définition, le *produit* d'un nombre algébrique a par un autre nombre algébrique b est un troisième nombre c qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues de a et de b, et pour signe le signe + ou le signe — suivant que a et b ont les mêmes signes ou des signes contraires. Les deux nombres a et b s'appellent les deux *facteurs* du produit ; a s'appelle le multiplicande et b le multiplicateur.

On exprime que c est le produit de a par b en écrivant l'une quelconque des égalités

$$c = a \times b,$$
$$c = a.b.$$

On a, d'après cela :

$$(+7).(+5) = +(7 \times 5),$$
$$(-7).(-5) = +(7 \times 5),$$
$$(-7).(+5) = -(7 \times 5),$$
$$(+7).(-5) = -(7 \times 5).$$

31. Théorème. — *Le produit de deux nombres algébriques ne change pas quand on intervertit l'ordre des deux facteurs.*

En effet, la valeur absolue ni le signe du produit ne dépendent de l'ordre des facteurs, par définition.

32. Produit de plusieurs facteurs.— On appelle produit de plusieurs facteurs $a, b, c, \ldots\ldots, l$, *donnés dans un ordre déterminé*, le nombre obtenu en multipliant le premier facteur par le deuxième, le résultat obtenu par le troisième, et ainsi de suite jusqu'au dernier. On représente le produit de plusieurs facteurs par l'une quelconque des expressions

$$a \times b \ldots\ldots \times l,$$
$$a.b.c \ldots\ldots l.$$

Dans un tel produit, comme dans tout nombre algébrique, il faut considérer la valeur absolue et le signe. La valeur absolue est évidemment égale au produit des valeurs absolues des facteurs du produit, et quant au signe, on voit sans difficulté qu'il est + ou — suivant que le nombre des facteurs négatifs est pair ou impair. Par exemple, le signe du produit $(-3)(-4)(-5)(+7)$ est —, parce que le nombre des facteurs négatifs est égal à 3 ; au contraire le signe du produit $(-3)(-4)(-5)(-6)(+7)$ est +, parce que le nombre des facteurs négatifs est 4. De là résultent immédiatement les deux propositions suivantes :

33. Théorème. — *Pour qu'un produit de plusieurs facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.*

En effet, il faut et il suffit que la valeur absolue soit nulle ; or, la valeur absolue est le produit des valeurs absolues des divers facteurs ; donc il faut et il suffit que la valeur absolue de l'un des facteurs du produit soit nulle et par suite que l'un des facteurs soit nul.

34. Théorème. — *Dans un produit de plusieurs facteurs algébriques, on peut intervertir à volonté l'ordre des facteurs sans que le produit soit changé.*

En effet, la valeur absolue est indépendante de l'ordre des facteurs (*Arithm.*, 25). De même le signe dépend uniquement (32) de la parité du nombre des facteurs négatifs, mais nullement de l'ordre des facteurs.

35. Corollaires. — 1° *Dans un produit de plusieurs facteurs algébriques, on peut remplacer deux ou plusieurs facteurs par leur produit effectué.*

2° *Pour multiplier un nombre algébrique a par un produit* P *de facteurs algébriques, il suffit de multiplier a successivement par les facteurs du produit* P, *dans un ordre quelconque.*

En d'autres termes, si $P = b.c.d$, on a
$$a.P = a.b.c.d.$$
(*Arithm.*, 26).

36. Théorème. — *Pour multiplier une somme algébrique de deux termes par un nombre, on multiplie chaque terme de la somme par ce nombre et on ajoute les résultats.*

Une somme algébrique de deux termes peut toujours se ramener à la somme $a + b$; il s'agit alors de prouver que
$$(a + b)c = ac + bc.$$
Il y a deux cas à examiner :

1° *Les deux termes de la somme ont le même signe.* — Soient α, β, γ les valeurs absolues respectives de a, b, c. Puisque les deux termes a et b ont le même signe, la valeur absolue de $a + b$ est $\alpha + \beta$; celle de c étant γ, la valeur absolue du produit $(a + b)c$ est $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$. (*Arithm.*, 27). Mais a et b ayant le même signe, ac et bc ont aussi le même signe ; donc la valeur absolue de $ac + bc$ est $\alpha\gamma + \beta\gamma$. Il en résulte que $(a + b)c$ et $ac + bc$ ont la même valeur absolue. Ces deux expressions ont aussi le même signe, qui est celui des deux termes ou le signe contraire suivant que c est positif ou négatif ; donc elles sont égales.

2° *Les deux termes de la somme ont des signes contraires.* — Comme l'on peut écrire la somme $a + b$ ou $b + a$, on ne restreint pas le raisonnement en supposant $\alpha > \beta$; alors la valeur absolue de $(a + b)c$ est $(\alpha - \beta)\gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma$. Or ac et bc ont des signes contraires, et comme on a $\alpha\gamma > \beta\gamma$, la valeur absolue de $ac + bc$ est aussi $\alpha\gamma - \beta\gamma$. Les deux expressions $(a + b)c$ et $ac + bc$ ont donc encore la même valeur absolue. Elles ont aussi le même signe, celui de a ou le signe contraire suivant que c est positif ou négatif ; donc elles sont égales. C. Q. F. D.

37. Corollaire I. — *Pour multiplier une somme algébrique par un nombre, on multiplie les divers termes de la somme par ce nombre et on ajoute les résultats* (Arithm., 27).

Ainsi $(a + b + c + d)f = af + bf + cf + df$.

38. Corollaire II. — *Pour multiplier deux sommes entre elles, on peut multiplier tous les termes de la première successivement par tous les termes de la seconde et ajouter les résultats* (Arithm., 28).

39. Corollaire III. — *Pour multiplier plusieurs sommes entre elles, on fait la somme de tous les résultats obtenus en prenant, de toutes les manières possibles, un terme dans chaque somme.*

Ainsi $$(a+b+c)(d+f) = ad+af \\ +bd+bf \\ +cd+cf.$$

40. Puissances. — On appelle *puissance* d'un nombre algébrique le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre. Comme en arithmétique, la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un nombre a se représente par a^m.

Toute puissance *paire* d'un nombre positif ou négatif est un nombre positif; mais une puissance impaire d'un nombre négatif est un nombre négatif. Ceci résulte évidemment de la définition du produit de plusieurs facteurs (32).

Lorsque dans un produit il y a α facteurs égaux à a, β égaux à b, etc., λ égaux à l, on peut, comme en arithmétique, écrire ce produit sous la forme

$$a^\alpha . b^\beta ..... l^\lambda .$$

41. Racines. — La racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre algébrique a est un autre nombre algébrique b dont la puissance m est égale à a. On la représente, comme en arithmétique, par le symbole $\sqrt[m]{a}$, qu'on appelle un radical; m s'appelle l'*indice* du radical. *On démontre* que les nombres négatifs ont toujours une racine $m^{\text{ième}}$ de même signe et une seule si m est impair et qu'ils n'en ont pas dans le cas contraire.

On démontre aussi qu'un nombre positif a deux racines $m^{\text{ièmes}}$ si m est pair et que ces deux racines sont des nombres égaux et de signes contraires ; qu'il n'a qu'une racine si m est impair, et que cette racine est un nombre positif.

Division.

42. Définition. — *Diviser* un nombre algébrique a par un autre nombre algébrique b, c'est trouver un troisième nombre q appelé *quotient* et tel que le produit bq soit égal à a. Les deux nombres a et b s'appellent respectivement *dividende* et *diviseur*.

On représente le quotient q par le symbole $\frac{a}{b}$, que l'on

énonce *a sur b* et qu'on appelle une *fraction algébrique*. On a donc, par définition,

$$q = \frac{a}{b},$$

ou, ce qui revient au même,

$$a = bq.$$

Le symbole $\frac{a}{b}$ n'a pas de sens quand $b = 0$.

43. Justification de la définition. — Il faut prouver que le nombre q existe et qu'il n'y en a pas d'autres.

1° *Le quotient existe.* — Divisons en effet la valeur absolue (10) de a par celle de b et donnons au quotient ainsi obtenu le signe + si a et b sont de même signe, et le signe — dans le cas contraire ; le nombre q ainsi trouvé est le nombre cherché. Soient, en effet, α, β, γ les valeurs absolues respectives de a, b, q ; on a évidemment, en vertu de la définition du quotient exact de deux nombres arithmétiques (V. *Arithm.*, 115),

$$\beta\gamma = \alpha.$$

De plus, si a et b sont de même signe, comme q est positif, bq a le même signe que b, c'est-à-dire que a, ainsi que cela résulte du signe d'un produit de deux facteurs (30). Si a et b sont de signes contraires, comme q est négatif, le signe de bq est contraire à celui de b, c'est-à-dire le même que celui de a. De toutes façons bq et a ont la même valeur absolue et le même signe ; donc ils sont égaux.

2° *Le quotient est unique.* — En effet s'il en existe un autre, q', de valeur absolue γ', on doit avoir

$$\beta\gamma' = \alpha.$$

Mais on a déjà trouvé $\beta\gamma = \alpha$; on voit donc, en comparant les deux résultats, que γ' doit être égal à γ, ce qui signifie que q' doit avoir la même valeur absolue que q. Il doit aussi avoir le même signe ; car si l'on détermine le signe du produit $b.q'$ en combinant le signe de b avec celui de q' (30), on doit trouver le signe de a ; et comme on doit trouver également le signe de a en combinant le signe de b avec celui de q, il est bien clair que les signes de q et de q' doivent être les mêmes. C. Q. F. D.

La définition se trouve ainsi justifiée et nous sommes conduits à la règle suivante :

Règle. — *Pour obtenir le quotient* $\frac{a}{b}$, *on divise la v*

leur absolue de a par celle de b, et l'on affecte le nombre arithmétique ainsi obtenu du signe + ou du signe — suivant que a et b sont de même signe ou de signes contraires.

D'après cela on a :

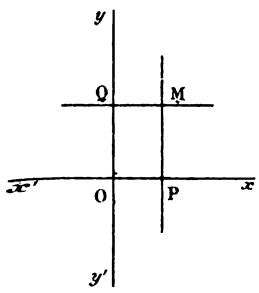
$$\frac{(+5)}{(+4)} = \left(+\frac{5}{4}\right),$$
$$\frac{(-5)}{(-4)} = \left(+\frac{5}{4}\right),$$
$$\frac{(+5)}{(-4)} = \left(-\frac{5}{4}\right),$$
$$\frac{(-5)}{(+4)} = \left(-\frac{5}{4}\right).$$

44. Remarque. — Un simple coup d'œil en arrière montre que si tous les nombres sur lesquels on opère sont positifs, les règles de calcul sont les mêmes que celles des nombres arithmétiques. Aussi dans la pratique on confond les nombres positifs avec les nombres arithmétiques, et l'on représente un nombre positif par le nombre arithmétique correspondant, sans le faire précéder d'aucun signe. C'est ce que nous ferons généralement dans la suite ; le signe sera alors le signe + sous-entendu.

Applications.

45. Application I. — *Fixer la position d'un point dans un plan.*

Soit M le point donné ; traçons dans le plan deux axes rectangulaires $x'x$ et $y'y$ et menons MP et MQ respectivement perpendiculaires à $x'x$ et à $y'y$. Il est clair que la position du point M est fixée en même temps que celle des parallèles MP à $y'y$ et MQ à $x'x$; or, la position de la première est fixée en même temps que celle du point P et la position de la deuxième en même temps que celle du point Q.



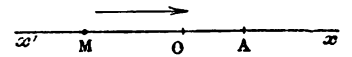
D'après cela, fixons un sens positif sur chacun des axes $x'x$ et $y'y$ (le sens de x' vers x pour le premier, et le sens de y' vers y pour le second), et appelons x le nombre algébrique qui corres-

pond au segment OP, y le nombre algébrique qui correspond au segment OQ. La position du point M est complètement définie par ces deux nombres; on les appelle les *coordonnées* du point M.

46. Application II. — *Équation du mouvement uniforme.*

On dit que le mouvement d'un point mobile sur une droite est *uniforme* quand ce point parcourt des longueurs égales dans des temps égaux, quels que soient ces temps égaux.

Soit $x'x$ la droite sur laquelle se meut le point et sur laquelle nous fixerons un sens positif et une origine O. Concevons que l'on observe le mobile à un instant donné, quand il est en A par exemple,



et considérons le temps comme positif ou comme négatif suivant qu'il est postérieur ou antérieur à cet instant. Appelons *instant origine* ou temps zéro l'instant où le mobile passe en A, et soit t un intervalle de temps quelconque, positif ou négatif, compté à partir du temps zéro. Appelons enfin v la vitesse du mobile, c'est-à-dire le segment algébrique parcouru par lui pendant une unité de temps; le nombre v est positif ou négatif suivant que le mouvement s'effectue dans le sens positif ou dans le sens négatif.

Cela posé, soit M la position du mobile au temps t et proposons-nous de calculer le segment algébrique OM connaissant le segment algébrique OA, le temps t et la vitesse v. On a évidemment

$$OA + AM + MO = 0;$$

car si l'on ajoute (17) les trois segments OA, AM et MO, on obtient un segment qui a pour origine O et pour extrémité le même point, c'est-à-dire un segment nul. Si on ajoute alors OM aux deux membres, il vient

$$OA + AM + \underline{MO + OM} = OM.$$

Or, la somme $MO + OM$ soulignée, des deux segments MO et OM, étant nulle en vertu de la définition (17), l'égalité précédente s'écrit

$$OA + AM = OM$$

ou, en échangeant les deux membres,

$$OM = OA + AM.$$

Tout revient donc à calculer le segment algébrique AM. Or,

il est clair que la longueur de ce segment est égale à la valeur absolue du produit vt, car si l'on appelle v l'espace parcouru pendant l'unité de temps, l'espace parcouru pendant le temps t est égal à vt. Il reste alors à prouver que les signes sont les mêmes. Il faut pour cela distinguer quatre cas suivant les signes de v et de t, savoir :

1° v et t tous deux positifs ; 2° v et t tous deux négatifs ; 3° v positif et t négatif ; 4° v négatif et t positif. — Nous nous bornerons à en examiner un, le raisonnement étant le même pour tous. Supposons par exemple v positif et t négatif ; le mouvement s'effectue dans le sens positif, mais t étant négatif, l'instant où le mobile est en M est antérieur à celui où il est en A, donc le segment AM est négatif, comme le produit vt, et l'on a

$$AM = vt.$$

Si donc on appelle a et x les valeurs algébriques des segments OA et OM, on a

$$x = a + vt.$$

Telle est l'équation du mouvement uniforme.

Fractions algébriques.

47. Rappel de la définition. — Nous avons appelé *fraction algébrique* le symbole $\frac{a}{b}$ qui exprime le quotient de la division du nombre algébrique a par le nombre algébrique b *non nul*. Si donc on appelle q ce quotient, on a

$$\frac{a}{b} = q$$

ou, ce qui revient au même,

$$a = bq.$$

48. Extension des propriétés démontrées en arithmétique. — Théorème I. — *On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre non nul.*

Soit la fraction $\frac{a}{b} = q.$ (1)

Prouvons d'abord que l'on a aussi

$$\frac{ac}{bc} = q,$$

c désignant un nombre quelconque non nul. Pour cela, remarquons que l'égalité (1) est équivalente, par définition, à la suivante :

$$a = bq ;$$

par conséquent on a successivement

$$ac = bqc,$$
$$ac = (bc)q.$$

Cette dernière égalité exprime que

$$\frac{ac}{bc} = q. \qquad (2)$$

Comme on peut passer de (2) à (1) en divisant les deux termes par c, on voit que la valeur de la fraction n'est pas changée quand on divise les deux termes par le même nombre.

49. Remarque. — Comme en arithmétique (95), ce théorème permet soit de simplifier une fraction, soit de réduire plusieurs fractions au même dénominateur. La marche à suivre est la même qu'en arithmétique.

50. Théorème II. — *La somme algébrique de plusieurs fractions ayant le même dénominateur est une fraction ayant le même dénominateur et dont le numérateur est égal à la somme algébrique des numérateurs.*

Soient plusieurs fractions algébriques

$$\frac{a}{m}, \qquad \frac{b}{m}, \qquad \frac{c}{m};$$

il s'agit de prouver que

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} = \frac{a+b-c}{m}.$$

Appelons en effet p, q, r les valeurs respectives des trois fractions. On a, par définition,

$$a = mp, \qquad b = mq, \qquad c = mr \qquad (1)$$

et

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} = p + q - r.$$

Or, des égalités (1) on déduit

$$a + b - c = mp + mq - mr,$$

et d'autre part on a (37)

$$mp + mq - mr = m(p + q - r).$$

Il en résulte $a + b - c = m(p + q - r)$,

égalité qui exprime que $p + q - r$, c'est-à-dire la somme

algébrique des trois fractions, est égale au quotient

$$\frac{a+b-c}{m}.$$

51. Théorème III. — *Si l'on a plusieurs égalités*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{g}{f} \qquad (1)$$

entre fractions algébriques, la fraction

$$\frac{ma+pc+qg}{mb+pd+qf},$$

dans laquelle m, p, q sont des nombres quelconques, est égale à chacune d'elles.

Soit q_1 la valeur commune des fractions (1) ; on a par définition

$$a=bq_1, \qquad c=dq_1, \qquad g=fq_1,$$

et l'on en déduit successivement

$$am=(bm)q_1, \qquad cp=(dp)q_1, \qquad gq=(fq)q_1,$$
$$am+cp+gq=(bm+dp+fq)q_1;$$

enfin

$$\frac{am+cp+gq}{bm+dp+fq}=q_1.$$

52. Théorème IV. — *Le produit de plusieurs fractions est une fraction qui a pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs.*

Prouvons, par exemple, que $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. Pour cela appelons q et q' les valeurs respectives de $\frac{a}{b}$ et de $\frac{c}{d}$, de sorte que l'on a

$$a=bq,$$
$$c=dq';$$

et par suite, en multipliant membre à membre,

$$ac=bq.dq',$$

que l'on peut écrire

$$ac=bd.qq'.$$

On voit, avec l'égalité mise sous cette forme, que qq' est égal au quotient $\frac{ac}{bd}$; or, qq' est justement le produit des deux fractions.

53. Corollaire. — *Dans un produit de plusieurs frac-*

tions algébriques, on peut intervertir à volonté l'ordre des facteurs sans que le produit soit changé.

54. Théorème V. — *Le quotient de deux fractions s'obtient en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Ainsi le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ est égal à $\frac{ad}{bc}$; car si l'on multiplie $\frac{ad}{bc}$ par $\frac{c}{d}$, qui est le diviseur, on retrouve le dividende.

Expressions algébriques.

55. Définition d'une expression algébrique. — On appelle *expression algébrique* un ensemble de nombres et de lettres réunis entre eux par des signes; les lettres représentent des nombres quelconques, et les signes indiquent les opérations à effectuer sur tous les nombres qui entrent explicitement dans l'expression ou qui sont représentés par des lettres.

56. Valeur numérique d'une expression algébrique. — On appelle valeur numérique d'une expression algébrique, *pour un système de valeurs numériques quelconques attribuées aux lettres qui y entrent*, le nombre algébrique obtenu en remplaçant chaque lettre par la valeur numérique qui lui est attribuée et en effectuant ensuite les opérations indiquées par les signes *et dans l'ordre où elles sont indiquées*. Une expression algébrique a donc autant de valeurs numériques que l'on veut. Il ne faut pas croire cependant qu'elle a une valeur numérique pour chaque système de valeurs numériques attribuées aux lettres qu'elle renferme; car il faut encore que les opérations indiquées soient possibles.

57. Expressions algébriques équivalentes. — Deux expressions algébriques sont *équivalentes*, par définition, quand leurs valeurs numériques sont égales pour tous les systèmes de valeurs attribuées aux lettres. *Exemples :* $a+b-c$ est équivalente à $a-c+b$; $a(b+c)$ est équivalente à $ab+ac$.

58. Définition d'un monome. — Un monome est une

expression algébrique qui ne renferme aucun signe d'addition ou de soustraction. Dans tout monome on distingue la *partie littérale* et le *coefficient*. Par exemple $+7a^3b^2c$ et $-7ab^2c^3$ sont deux monomes dont les coefficients respectifs sont $+7$ et -7 ; les parties littérales sont a^3b^2c et ab^2c^3.

On distingue deux espèces de monomes : les monomes *entiers*, qui ne renferment aucune lettre en dénominateur, et les monomes *fractionnaires*, qui renferment des lettres en dénominateur.

Les monomes $+7a^3b^2c$ et $-7ab^2c^3$ donnés plus haut sont entiers et il en est de même des monomes $+\frac{4}{3}a^4b^2$ et $-\frac{2}{5}ab^2c$; mais les monomes $+\frac{3ab^2c}{4de^2}$, $-\frac{2a^5b^2}{3c^3d^2}$ sont des monomes fractionnaires, ayant pour coefficients respectifs $+\frac{3}{4}$ et $-\frac{2}{3}$.

59. Monomes semblables. — Plusieurs monomes sont appelés *semblables* quand ils ne diffèrent que par les coefficients.

Exemple : $+3a^2bc^3$, $-5a^2bc^3$, $-6a^2bc^3$ sont des monomes semblables.

60. Degré d'un monome entier. — On appelle degré d'un monome entier la somme des exposants des lettres qui entrent dans la composition du monome. Pour l'évaluation de ce degré on considère une lettre dépourvue d'exposant comme affectée de l'exposant 1 et on ne tient pas compte du coefficient ; le monome $3ab^2c^4$ est du septième degré.

61. Polynomes. — On appelle polynome une somme algébrique de monomes. Les *termes* du polynome sont les divers monomes affectés chacun du signe qui le précède. Ainsi, $3a^2b - 4ab^2c - 5a^3b + 6a^2x^3b$ est un polynome dont les termes sont

$$+3a^2b, \quad -4ab^2c, \quad -5a^3b \quad \text{et} \quad +6a^2x^3b.$$

Un *binome* est un polynome à deux termes ; un *trinome* est un polynome à trois termes, et ainsi de suite.

$3a^2b - \frac{2}{3}ab^2c$ est un binome ;

$$4a^2b^2 - 5a^2b^3 + 7ab^4 + \frac{3}{2}\,ab^3c^2$$

est un polynome à quatre termes.

On appelle *degré* d'un polynome celui du terme qui a le degré le plus élevé ; le polynome précédent est du sixième degré.

Un polynome est dit homogène quand tous ses termes ont le même degré ; tel est par exemple le polynome

$$3a^2b - 5ab^2 + 6abc.$$

62. Réduction des termes semblables. — Un polynome étant une somme, on peut remplacer deux ou plusieurs termes pris à volonté dans le polynome par leur somme effectuée, ce que l'on indique en enfermant ces termes dans une parenthèse. Par exemple, on a

$$P - 3a^2b + 5a^2b - 7a^2b = P + (5a^2b - 3a^2b - 7a^2b).$$

Supposons, comme dans le cas actuel, que les termes ainsi placés entre parenthèses soient des monomes semblables ; on peut alors mettre en facteur dans la somme la partie littérale commune, et l'on a

$$+ 5a^2b - 3a^2b - 7a^2b = a^2b\,(-3 + 5 - 7).$$

Si l'on effectue la somme algébrique $-3+5-7$, le second membre de cette égalité se réduit à $-5a^2b$, ce qui signifie que la somme des termes semblables $+5a^2b$, $-3a^2b$, $-7a^2b$ est équivalente au monome unique

$$-5a^2b.$$

Il en résulte alors que l'expression $P - 3a^2b + 5a^2b - 7a^2b$ est équivalente à l'expression plus simple $P - 5a^2b$.

Si l'on opère de même pour tous les groupes de termes semblables du polynome, on dit que l'on a effectué la ***réduction*** des termes semblables.

63. Polynomes ordonnés. — Supposons que l'on ait effectué la réduction des termes semblables d'un polynome. On dit alors que le polynome est *ordonné* par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre x quand les termes sont écrits dans un ordre tel que l'exposant de cette lettre aille constamment en décroissant quand on passe d'un terme au suivant. On conçoit d'après cela ce qu'il faut entendre quand on dit qu'un polynome est ordonné par rapport aux puissances croissantes d'une lettre x.

Exemples : $-2x^4+7x^3-4x^2-5x+9$,

$1+2x-5x^2+7x^3-x^4$

sont deux polynomes ordonnés, le premier par rapport aux puissances décroissantes de x, le second par rapport aux puissances croissantes de la même lettre. Le polynome

$$5a^4-7a^3b-9a^2b^2+7ab^3-10b^4$$

est ordonné à la fois par rapport aux puissances décroissantes de la lettre a et par rapport aux puissances croissantes de la lettre b.

Addition, soustraction et multiplication algébriques.

64. Addition. — La valeur numérique d'un monome est un nombre algébrique ; par suite l'addition de plusieurs monomes revient à l'addition de plusieurs nombres algébriques. On écrira donc les divers monomes les uns à la suite des autres en conservant son signe à chacun d'eux. Si parmi ces monomes il y en a qui sont semblables, on fera la réduction des termes semblables dans la somme, comme cela a été expliqué au n° 62.

Ainsi, par exemple, la somme des quatre monomes $2a^2b$, $-4a^3$, $-7a^2b$, $5ab^2$ est le polynome

$$2a^2b-4a^3-7a^2b+5ab^2,$$

ou bien le polynome

$$-5a^2b-4a^3+5ab^2.$$

65. Un polynome étant une somme, la règle d'addition des polynomes sera la même que la règle d'addition des sommes (23). Ajoutons simplement qu'après avoir écrit les termes des divers polynomes les uns à la suite des autres, on fait la réduction des termes semblables. Pour faciliter cette réduction, il y a avantage à les ordonner par rapport aux puissances d'une lettre et à disposer l'opération comme dans l'exemple ci-dessous :

$$\begin{array}{r}
2x^5-4x^4+7x^3-5x^2-2x+1\\
-3x^5\qquad -2x^3+x^2-7x\\
+6x^4-x^3+3x^2+4x-6\\
\hline
-x^5+2x^4+4x^3-x^2-5x-5
\end{array}$$

66. Soustraction. — *Pour retrancher deux monomes on écrit le second à la suite du premier en changeant son signe.*

Pour retrancher un polynome d'une expression, on écrit les termes du polynome à la suite de l'expression en changeant le signe de chacun d'eux.

Ces deux règles sont des conséquences de la théorie de la soustraction des nombres algébriques (27 et 29).

67. Remarque. — Supposons que P, P_1, P_2, P_3 soient des polynomes, et proposons-nous de calculer l'expression

$$P - P_1 - P_2 + P_3.$$

Pour cela, nous écrirons le polynome P sur une première ligne horizontale ; au-dessous nous écrirons le polynome P_1 en changeant les signes de tous les termes et en ayant soin de placer les termes semblables sur la même ligne verticale, et ainsi de suite ; puis nous ajouterons, en faisant au fur et à mesure la réduction des termes semblables.

Soient par exemple

$$\begin{array}{rl} P = & 2x^4 \qquad - 5x^2 + 3x + 4 \\ - P_1 = & \qquad 3x^3 - 2x^2 + 4x - 3 \\ - P_2 = & -3x^4 + x^3 + 8x^2 - 5x - 1 \\ P_3 = & 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 2 \\ \hline P - P_1 - P_2 + P_3 = & 3x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2 \end{array}$$

68. Multiplication. — Les règles de multiplication des monomes et des polynomes sont aussi des conséquences des règles de multiplication des nombres algébriques. Voici comment on les énonce :

1° *Pour multiplier deux ou plusieurs monomes entiers, on multiplie les coefficients, et, à la droite du produit, on écrit toutes les lettres qui entrent dans les divers monomes, en affectant chacune d'elles d'un exposant égal à la somme des exposants.*

Exemple : Soit à multiplier entre eux les trois monomes

$$4a^2b, \qquad -\frac{2}{3}ab^2c, \qquad 3abc;$$

le produit est le monome

$$-8a^5b^4c^2.$$

2° *Pour multiplier deux ou plusieurs polynomes, on ajoute tous les produits obtenus en prenant de toutes les manières possibles un terme dans chaque polynome.*

Afin de ne pas oublier de termes dans le produit, on multiplie le premier polynome par le second, puis le résultat obtenu par le troisième, et ainsi de suite. Enfin pour multi-

plier deux polynomes on adopte la disposition ci-dessous :

$$\begin{array}{r} a-b+c \\ -e+f-h \\ \hline -ae+be-ce \\ +af-bf+cf \\ -ah+bh-ch \\ \hline -ae+be-ce+af-bf+cf-ah+bh-ch \end{array}$$

69. Remarque. — Voici quelques formules importantes que l'on obtient facilement d'après cette règle :

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2,$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2.$$

On les énonce facilement en langage ordinaire. Par exemple la dernière peut s'énoncer ainsi : *Le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence de leurs carrés, et vice versa.*

Division algébrique.

70. Définition. — Diviser deux expressions algébriques revient à diviser leurs valeurs numériques ; le quotient de deux expressions algébriques sera donc une fraction algébrique ayant pour numérateur l'expression dividende et pour dénominateur l'expression diviseur. En général on ne pourra pas simplifier cette fraction. Nous allons examiner les cas principaux.

71. Division de deux puissances de la même lettre ; exposant zéro. — *Lorsque m et n sont des nombres entiers et positifs tels que m soit plus grand que n, le quotient $\frac{a^m}{a^n}$ est égal à a^{m-n}.*

En effet, si l'on multiplie a^{m-n} par le diviseur, on retrouve le dividende.

Supposons que $m=n$; l'application de la règle précédente conduit à écrire

$$\frac{a^m}{a^m} = a^0.$$

On trouve ainsi un symbole a^0 *qui n'a pas de sens. On convient* de considérer ce symbole comme équivalent à l'unité, quelle que soit la valeur numérique attribuée à a. On est du reste conduit à faire cette convention en observant que $\frac{a^m}{a^m}$ représentant le quotient de deux nombres égaux, représente aussi l'unité.

72. Division de deux monomes. — La fraction algébrique qui représente le quotient de la division de deux monomes ne peut être simplifiée que si les deux monomes ont des facteurs communs. Pour que cette fraction se réduise donc à un monome, il faut et il suffit que toutes les lettres du dénominateur figurent aussi au numérateur avec un exposant au moins égal à celui que chacune d'elles a au dénominateur. Dans ce cas le monome quotient est ainsi composé :

1° Son coefficient est égal au quotient des coefficients ;

2° Sa partie littérale se compose des lettres qui entrent au numérateur, et l'exposant de chacune d'elles est égal à la différence des exposants qu'elle a au numérateur et au dénominateur.

D'après cela, on aura

$$\frac{\frac{2}{3}a^3b^2c^4d}{-\frac{5}{3}a^2c^3} = -\frac{2}{5}ab^2cd.$$

73. Monome et polynome. — On ne peut, en général, simplifier la fraction algébrique qui représente le quotient de la division d'un polynome par un monome. Il y a exception quand tous les termes du dividende sont divisibles par le diviseur ; dans ce cas la règle à suivre est exprimée par l'égalité suivante :

$$\frac{a-b+c-d}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} - \frac{d}{m}$$

et on l'énonce ainsi : *Pour diviser un polynome par un monome on divise chaque terme du polynome par le monome, et on fait la somme algébrique des résultats.*

On ne peut de même, en général, simplifier la fraction qui représente le quotient de la division d'un monome par un polynome.

LIVRE II

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ PROBLÈMES

Principes généraux sur les équations.

74. Définitions. — On appelle *identité* une égalité évidente par elle-même ou qui devient évidente à la suite d'opérations effectuées sur ses deux membres : $5 + 3 = 8$ est une identité, et il en est de même de l'égalité

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Une *équation* est une égalité qui devient une identité quand on y remplace certaines des lettres qui y entrent par des valeurs particulières. Ces lettres s'appellent les *inconnues* de l'équation, et les valeurs particulières qu'il faut leur attribuer pour transformer l'égalité en identité portent le nom de *solutions* ou *racines* de l'équation : on les désigne habituellement par les dernières lettres de l'alphabet.

Par exemple l'égalité

$$3x + 7 = 16$$

devient une identité si l'on y remplace la lettre x par 3. Cette égalité est une équation dont l'inconnue est x et dont la solution est 3.

Résoudre une équation, c'est en chercher les solutions.

On dit qu'une équation est *vérifiée* ou satisfaite par ses racines pour exprimer qu'elle devient une identité quand on y remplace les inconnues par les racines.

On dit que deux équations renfermant les mêmes inconnues sont *équivalentes* lorsque toute solution de la première est solution de la seconde, et inversement.

Quand on remplace une équation par une autre qui lui est équivalente, on dit qu'on n'*altère pas* l'équation proposée.

Plusieurs équations renfermant les mêmes inconnues et qui admettent des solutions communes constituent ce qu'on appelle un *système d'équations*.

Deux systèmes d'équations renfermant les mêmes incon-

nues sont dits *équivalents*, quand toute solution du premier est solution du second, et inversement.

Il importe de bien définir ce qu'il faut appeler *solution* d'une ou de plusieurs équations.

Supposons, pour cela, qu'une ou plusieurs équations renferment les inconnues x, y, z et deviennent des identités quand on y remplace simultanément x par a, y par b, z par c ; dans ces conditions, on dit que l'ensemble des trois nombres a, b, c constitue *une solution* des équations considérées.

75. Théorème I. — *On n'altère pas une équation quand on ajoute ou que l'on retranche une même quantité à ses deux membres.*

Il s'agit de prouver, par exemple, que toute solution de l'équation

$$3x + 7 = 16 \qquad (1)$$

est aussi solution de l'équation

$$3x + 7 + 4 = 16 + 4, \qquad (2)$$

et réciproquement.

En effet, toute solution de (1) rendant identiques les deux nombres $3x + 7$ et 16 rend identiques les deux nombres $3x + 7 + 4$ et $16 + 4$ obtenus en ajoutant 4 à chacun des deux premiers.

Réciproquement, toute solution de (2) rendant identiques les deux nombres $3x + 7 + 4$ et $16 + 4$ rend identiques les deux nombres $3x + 7$ et 16 obtenus en retranchant 4 aux deux premiers.

Plus généralement, soit l'équation

$$A = B ; \qquad (3)$$

il faut prouver qu'elle est équivalente à

$$A + C = B + C. \qquad (4)$$

En effet, toute solution de (3) rendant A identique à B, rend $A + C$ identique à $B + C$; donc toute solution de (3) est solution de (4).

La réciproque en résulte ; car on passe de (4) à (3) en ajoutant $-C$ aux deux membres de (4).

Le raisonnement serait le même dans le cas de la soustraction.

76. Corollaire I. — *On peut faire passer un terme d'une équation d'un membre dans l'autre en changeant son signe.*

Par exemple, l'équation

$$5x + 2 = \frac{3}{4}x - 7 \qquad (1)$$

peut s'écrire

$$5x + 2 + 7 = \frac{3}{4}\,x\,; \qquad (2)$$

car cela revient à ajouter 7 aux deux membres de l'équation et à remplacer dans le second membre $-7+7$ par 0. Mais l'équation (2) se déduit de l'équation (1) en faisant passer -7 dans le premier membre après avoir changé son signe ; d'où la proposition énoncée.

77. Corollaire II. — *On peut faire passer tous les termes d'une équation dans un seul membre, de manière que le second membre devienne ainsi* 0.

En effet, il n'y a qu'à faire passer successivement chaque terme du second membre dans le premier, comme cela vient d'être indiqué, et le second membre devient ainsi 0. D'après cela l'équation (1) du numéro précédent peut s'écrire

$$5x - \frac{3}{4}\,x + 2 + 7 = 0,$$

ou encore, en mettant x en facteur dans les deux premiers termes,

$$x\left(5 - \frac{3}{4}\right) + 9 = 0\,;$$

ou enfin

$$\frac{17}{4}\,x + 9 = 0,$$

ce qui est une forme plus simple que la première.

78. Corollaire III. — *On peut changer les signes de tous les termes d'une équation.*

Car cela revient à faire passer tous les termes du premier membre dans le second, tous les termes du second dans le premier, et à lire le second membre de la nouvelle équation à la place du premier, et *vice versa*.

79. Théorème II. — *On n'altère pas une équation en multipliant ou en divisant ses deux membres par une même quantité* QUI N'EST PAS NULLE.

Par exemple les deux équations

$$2x - 7 = 5 \qquad (1)$$

et

$$3\,(2x - 7) = 3 \times 5 \qquad (2)$$

sont équivalentes. Soit en effet 6 une solution de la première. Pour $x = 6$ les deux nombres $2x - 7$ et 5 sont identi-

ques ; donc les deux nombres $3(2x-7)$ et 3×5, obtenus en multipliant les premiers par 3 sont aussi identiques ; ce qui montre que toute solution de (1) est solution de (2).

On voit de même que toute solution de (2) est solution de (1), car on passe de (2) à (1) en multipliant les deux membres par $\frac{1}{3}$; donc les deux équations sont bien équivalentes.

Plus généralement, soit l'équation

$$A = 0 \; ; \qquad (3)$$

nous allons prouver qu'elle est équivalente à

$$A.C = 0, \qquad (4)$$

pourvu que C ne puisse pas devenir nulle.

En effet, toute solution de (3) annulant A, annule le produit A.C et est par suite solution de (4).

Réciproquement, toute solution de (4) annule A puisque C ne peut devenir nulle ; par suite elle est solution de (3).

Le cas de la division en résulte ; car diviser par C, c'est multiplier par $\frac{1}{C}$.

Si l'on avait $C=0$, l'équation (4) admettrait les solutions de l'équation $C=0$, qui ne sont pas des solutions de l'équation (3).

80. **Corollaire.** — *Si une équation renferme des dénominateurs, on peut laremplacer par une équation équivalente n'en renfermant pas.*

La règle à suivre consiste à réduire tous les termes au même dénominateur et à multiplier ensuite les deux membres par le dénominateur commun.

Toutefois il n'est pas sûr qu'une solution de la nouvelle équation satisfasse à la première. On en est sûr si elle n'annule pas le dénominateur commun ; dans le cas contraire, il faut s'en assurer par une substitution directe.

Exemple : L'équation $\frac{2x}{3} - 7 = 4x + \frac{3}{5}$

est équivalente à l'équation

$$2\times 5x - 7\times 3\times 5 = 4\times 3\times 5x + 3\times 3,$$

c'est-à-dire à l'équation

$$10x - 105 = 60x + 9,$$

obtenue en multipliant les deux membres de l'équation proposée par le dénominateur commun, qui est $3\times 5 = 15$.

81. **Définitions.** — On dit qu'une équation est *rationnelle* quand elle ne renferme pas l'inconnue ou les inconnues

sous un radical ; on dit qu'elle est *entière* quand elle ne renferme pas d'inconnue en dénominateur. Par exemple l'équation $2x^2 - 7x = \frac{4}{3}x - 5$ est une équation rationnelle et entière. L'équation $\frac{3x-7}{x-2} = 9$ est une équation qui n'est pas entière, et l'équation

$$x - 7 + 3\sqrt{x-2} = 4$$

est une équation *irrationnelle*, c'est-à-dire qui n'est pas rationnelle.

On appelle *degré* d'une équation rationnelle et entière la somme des exposants des inconnues dans les termes où cette somme a la plus grande valeur. Par exemple l'équation $2x^2 - 7x = \frac{4}{3}x - 5$ est du second degré.

82. Remarque. — Dans ce qui précède il a été question d'une seule équation ; nous allons nous occuper maintenant de systèmes d'équations.

83. Théorème III. — *Un système de deux équations*

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ B &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

est équivalent au système

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ Am + Bn &= 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

pourvu que n ne soit pas nul.

En effet, toute solution de (1) annulant A et B annule la somme $Am + Bn$, c'est-à-dire est solution de (2).

Réciproquement, toute solution de (2) est solution de (1), car elle annule A et $Am + Bn$; par suite elle annule A et B, puisque n n'est pas nul.

Considérons, par exemple, le système des deux équations

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= -4, \\ 3x - 4y &= 17, \end{aligned} \qquad (3)$$

et ajoutons-les membre à membre après avoir multiplié la première par 3 et la deuxième par -2 ; nous obtenons ainsi l'équation

$$(2x + 5y)3 - (3x - 4y)2 = -4 \times 3 - 17 \times 2,$$

et le théorème démontré signifie, sur cet exemple, que le système formé par cette équation et par l'une des deux équations données est équivalent au système formé par ces deux équations. La démonstration donnée dans le cas général

s'applique facilement à ce cas particulier. Supposons en effet que l'on associe l'équation obtenue à la première équation donnée, de manière à former le système

$$\begin{matrix} 2x+5y=-4, \\ (2x+5y)3-(3x-4y)2=-4\times 3-17\times 2. \end{matrix} \qquad (4)$$

Toute solution de (3) rendant $2x+5y$ identique à -4 et $3x-4y$ identique à 17 est solution du système (4).

Réciproquement, toute solution de (4) rendant $2x+5y$ identique à -4 rend $(2x+5y)3$ identique à -4×3; mais si alors, dans la deuxième équation (4), on supprime de part et d'autre les deux nombres identiques $(2x+5y)3$ et -4×3, on voit que toute solution de (4) rend $-(3x-4y)2$ identique à -17×2, c'est-à-dire $3x-4y$ identique à 17. En résumé, toute solution de (4) est bien solution de (3).

84. Remarque. — On prouverait de même que le système

$$A=0, \qquad B=0, \qquad C=0, \qquad D=0$$

est équivalent au système

$$A=0, \qquad B=0, \qquad C=0, \qquad Am+Bn+Cp+Dq=0,$$

pourvu que le multiplicateur q de l'équation non conservée ne soit pas nul, m, n, p, q étant d'ailleurs des quantités quelconques, positives ou négatives.

85. Théorème IV. — *Étant donné un système d'équations simultanées, si de l'une d'elles on peut tirer la valeur d'une inconnue, x par exemple, comme si les autres inconnues étaient des quantités connues, le système formé par cette valeur de x et par les autres équations dans lesquelles x a été remplacé par cette valeur, est équivalent au système primitif.*

Il s'agit de prouver que le système

$$x=A, \qquad B=0, \qquad C=0, \qquad (1)$$

par exemple, est équivalent au système

$$x=A, \qquad B'=0, \qquad C'=0, \qquad (2)$$

dans lequel B' et C' désignent ce que deviennent respectivement B et C quand on y remplace x par A.

La proposition résulte immédiatement de ce que tout système de valeurs des inconnues rendant x et A identiques, rend B identique à B' et C identique à C'.

On trouvera une application de ce théorème au numéro 89.

Résolution d'une équation ou d'un système d'équations du premier degré.

86. **Problème.** — *Résoudre une équation du premier degré à une inconnue.*

Toute équation du premier degré à une inconnue peut, par des transformations qui ne l'altèrent pas, être ramenée à la forme

$$ax = b.$$

Résoudre cette équation, c'est trouver le nombre x qui, multiplié par a, donne b. Par définition (42), ce nombre est le quotient $\frac{b}{a}$; on peut donc écrire

$$x = \frac{b}{a},$$

pourvu que a ne soit pas nul. Si $a = 0$, le problème n'a pas de solution.

87. Règle pratique. — *Après avoir rendu l'équation rationnelle et entière, on fait passer tous les termes qui contiennent x dans le premier membre et les termes connus dans le second ; on met x en facteur dans le premier membre et l'on divise le second membre par le coefficient de x.*

88. **Exemple.** — *Résoudre*

$$3x - 2 = \frac{2x}{4} + \frac{4}{3} + \frac{25}{6}.$$

Le plus petit dénominateur commun étant 12, je multiplie les deux membres de l'équation par 12 et j'obtiens l'équation

$$36x - 24 = 6x + 16 + 50.$$

Appliquant maintenant la règle, j'obtiens successivement

$$36x - 6x = 24 + 16 + 50,$$
$$30x = 90,$$
$$x = \frac{90}{30} = 3.$$

89. **Problème.** — *Résoudre un système d'équations du premier degré.*

Nous supposerons que les systèmes à résoudre renferment autant d'équations que d'inconnues et nous indiquerons rapidement les diverses méthodes de résolution. Donnons d'abord une définition :

Éliminer une inconnue x entre les équations d'un système S, c'est remplacer ce système par un autre système S' qui lui soit équivalent et qui soit tel qu'une seule équation du système S' contienne l'inconnue x. Cela posé, voici les diverses méthodes de résolution :

I. — Méthode de résolution par substitutions. — Soit par exemple à résoudre le système

$$\left.\begin{aligned} x+y-z&=6,\\ x-2y+z&=-2,\\ 2x+3y+5z&=7. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

En vertu du théorème IV, ce système est équivalent au suivant :

$$\left.\begin{aligned} x&=6-y+z,\\ -3y+2z+6&=-2,\\ 12+y+7z&=7, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

qui a été obtenu en tirant x de la première équation du système (1) et en substituant dans les deux autres.

De la deuxième équation (2) je tire y et je porte dans les deux autres, ce qui donne le système

$$\left.\begin{aligned} x&=6-\frac{2z+8}{3}+z,\\ y&=\frac{2z+8}{3},\\ \frac{2z+8}{3}+7z+12&=7, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

équivalent à chacun des deux autres ; enfin de la dernière équation (3) je tire $z=-1$ et je porte cette valeur de z dans chacune des deux premières équations (3), ce qui donne le nouveau système

$$x=3, \qquad y=2, \qquad z=-1,$$

équivalent à chacun des autres et donnant les valeurs des inconnues x, y et z.

Comme on le voit facilement, la méthode s'étend à un système de n équations du premier degré à n inconnues : elle consiste à éliminer successivement x, y, etc. par l'emploi du théorème IV.

II. — Méthode de résolution par réduction ou méthode des multiplicateurs. — Prenons par exemple un système de trois équations à trois inconnues

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Soient α, β, γ trois nombres que nous déterminerons ultérieurement. Ajoutons les trois équations membre à membre, après avoir multiplié les deux membres de la première par α, les deux membres de la deuxième par β et les deux membres de la troisième par γ ; nous obtenons ainsi l'équation

$$(a\alpha+a'\beta+a''\gamma)x+(b\alpha+b'\beta+b''\gamma)y+(c\alpha+c'\beta+c''\gamma)z = d\alpha+d'\beta+d''\gamma. \quad (2)$$

Supposons alors que l'on puisse déterminer les nombres α, β, γ non tous nuls et de manière à annuler dans cette équation les coefficients de toutes les inconnues sauf une ; par exemple de manière à vérifier deux équations,

$$a\alpha + a'\beta + a''\gamma = 0,$$
$$b\alpha + b'\beta + b''\gamma = 0,$$

dont les premiers membres sont les coefficients respectifs de x et de y. Cela étant fait, de l'équation (2) on pourra tirer la valeur de z ; soit $z = h$ cette valeur. Supposons que γ par exemple ne soit pas nul ; en vertu du théorème n° 83, le système (1) peut être remplacé par le système équivalent

$$\left.\begin{aligned} ax + by + ch &= d \\ a'x + b'y + c'h &= d' \\ z &= h \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

dans lequel les deux premières équations seules renferment x et y ; de sorte que pour résoudre le système proposé il suffira de résoudre ces deux équations auxquelles on peut appliquer le même procédé, de manière à obtenir ainsi un nouveau système

$$\left.\begin{aligned} ax + bk + ch &= d \\ y &= k \\ z &= h \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

équivalent au système (3). Ce nouveau système permet d'obtenir facilement x, y et z.

On voit que l'on pourrait opérer de même pour un système de n équations à n inconnues.

Appliquons ceci à l'exemple numérique déjà traité

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 6 \\ x - 2y + z &= -2 \\ 2x + 3y + 5z &= 7 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Multiplions respectivement de part et d'autre par α, β, γ, et ajoutons membre à membre ; nous obtenons ainsi l'équation

$$x(\alpha+\beta+2\gamma)+y(\alpha-2\beta+3\gamma)+z(-\alpha+\beta+5\gamma)=6\alpha-2\beta+7\gamma. \quad (6)$$

Déterminons maintenant α, β, γ au moyen des équations

$$\alpha+\beta+2\gamma=0,$$
$$\alpha-2\beta+3\gamma=0.$$

En prenant $\beta=1$, on tire facilement de ces équations

$$\alpha=-7, \qquad \gamma=3.$$

Pour ce système de valeurs de α, β, γ, l'équation (6) devient

$$23z=-23,$$

et donne

$$z=-1.$$

En portant dans les équations (5) et observant que le multiplicateur γ de la troisième de ces équations n'est pas nul, on peut (84) remplacer le système (5) par le système équivalent

$$\left.\begin{aligned} x+y+1&=6\\ x-2y-1&=-2\\ z&=-1 \end{aligned}\right\}$$

ou, ce qui revient au même, par le système

$$\left.\begin{aligned} x+y&=5\\ x-2y&=-1\\ z&=-1 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Ajoutons membre à membre les deux premières équations de ce système, après avoir multiplié respectivement de part et d'autre par λ et μ, ce qui donne

$$x(\lambda+\mu)+y(\lambda-2\mu)=5\lambda-\mu. \quad (8)$$

Déterminons λ et μ au moyen de l'équation

$$\lambda+\mu=0 ;$$

en prenant $\mu=1$, cette équation donne $\lambda=-1$, et pour ces valeurs de λ et de μ, l'équation (8) devient

$$-3y=-6$$

et donne

$$y=2 ;$$

de sorte que si l'on remplace dans (7), ce système peut être remplacé par le suivant, qui lui est équivalent :

$$x+2=5,$$
$$y=2,$$
$$z=-1,$$

système qui donne finalement

$$x=3, \qquad y=2, \qquad z=-1.$$

90. **Remarque.** — Dans certains cas on voit tout de suite comment il faut choisir les multiplicateurs pour que

les coefficients de toutes les inconnues, sauf une, soient nuls. Soit par exemple le système

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Supposons que a et a' soient tous deux différents de zéro ; en multipliant respectivement par $-a'$, a et ajoutant, on obtient l'équation

$$(ab' - ba')y = ac' - ca', \quad (2)$$

qui ne contient pas x.

En ajoutant de même membre à membre après avoir multiplié respectivement de part et d'autre par b' et $-b$, on obtient l'équation

$$(ab' - ba')x = cb' - bc'. \quad (3)$$

Les équations (2) et (3) font connaître x et y quand le système (1) admet une solution.

Toutefois le système formé des équations (2) et (3) n'est pas toujours équivalent au système (1), parce que pour le former on n'a pas procédé régulièrement, comme cela a été expliqué dans le numéro précédent.

91. Méthode d'élimination par addition ou soustraction.— La méthode des multiplicateurs fournit le moyen d'éliminer simplement une inconnue entre deux équations. Nous en avons vu un exemple dans la remarque précédente, et comme cette méthode est très fréquemment employée pour la résolution des équations du premier degré, nous allons traiter plusieurs exemples numériques.

92. Exemple I. — *Résoudre les deux équations*

$$\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= -2 \\ 3x - 4y &= 11 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Éliminons d'abord x entre ces deux équations. Pour cela multiplions les deux membres de la première par 3, les deux membres de la seconde par -4 et ajoutons ensuite membre à membre. En faisant la réduction des termes semblables, on obtient ainsi l'équation

$$25y = -50,$$

qui donne

$$y = -2.$$

Portant ensuite cette valeur de y dans l'une quelconque des équations (1), dans la première par exemple, on obtient

$$4x - 6 = -2;$$

d'où l'on tire successivement

$$4x = 4,$$
$$x = 1.$$

Ainsi les équations (1) sont satisfaites quand on prend

$$x = 1 \qquad \text{et} \qquad y = -2.$$

93. Exemple II. — *Résoudre le système des deux équations*

$$4x + 7y = 29,$$
$$2x - 5y = -11.$$

En vertu de ce qui précède, pour éliminer une inconnue x entre deux équations, on peut suivre la règle suivante, qui est générale :

On multiplie les deux membres de la première équation par le coefficient de x dans la deuxième, les deux membres de la deuxième par le coefficient de x dans la première, et l'on retranche membre à membre. Ou bien encore *on multiplie les deux membres de la première équation par le coefficient de x dans la deuxième, les deux membres de la deuxième par le coefficient de x changé de signe dans la première, et on ajoute membre à membre.*

Toutefois on peut, dans certains cas, employer des multiplicateurs plus simples. Le système proposé nous en fournit un exemple. Si nous retranchons en effet membre à membre les équations de ce système, après avoir multiplié les deux membres de la deuxième par 2, nous obtenons l'équation

$$17y = 51,$$

qui donne

$$y = \frac{51}{17} = 3.$$

En portant alors cette valeur de y dans la deuxième équation du système, on en tire

$$2x = 15 - 11,$$

et finalement

$$x = 2.$$

Les valeurs de x et de y qui vérifient le système proposé sont donc respectivement 2 et 3.

Remarquons en passant l'analogie de la règle donnée plus haut pour éliminer une inconnue entre deux équations et de la règle de réduction de deux fractions au même dénominateur. Cette analogie ne se poursuit d'ailleurs pas plus loin.

Ajoutons enfin que, par l'emploi répété de cette règle, l'on pourra résoudre un système de n équations à n inconnues. En voici un exemple :

94. Exemple III. — *Résoudre le système*

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 6 \\ 3x + y - 5z &= -8 \\ 5x + 2y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Éliminons d'abord y entre les deux premières équations. Pour cela observons que les coefficients de y dans ces deux équations étant égaux et de signes contraires, il suffit de les ajouter membre à membre. On obtient ainsi l'équation

$$4x - 3z = -2. \quad (2)$$

Multiplions maintenant les deux membres de la première équation par 2 et ajoutons-la membre à membre avec la troisième ; nous éliminons ainsi de nouveau y et nous obtenons l'équation

$$7x + 3z = 13. \quad (3)$$

Les équations (2) et (3) peuvent ainsi remplacer deux des équations (1), par exemple les deux dernières (84). Autrement dit, le système

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 6 \\ 4x - 3z &= -2 \\ 7x + 3z &= 13 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

est équivalent au système (1).

Or, si l'on ajoute membre à membre les deux dernières équations de ce système, on obtient

$$11x = 11,$$

d'où l'on tire

$$x = 1.$$

Si l'on porte cette valeur de x dans les deux premières, on obtient les deux équations

$$-y + 2z = 5,$$
$$-3z = -6,$$

dont la dernière donne $z = \frac{-6}{-3} = 2$, et dont par suite la première donne

$$-y = 1$$

ou

$$y = -1.$$

On satisfait donc au système proposé en prenant

$$x = 1, \quad y = -1, \quad z = 2.$$

95. Remarque. — Les exemples traités jusqu'ici tendraient à faire supposer qu'un système renfermant autant d'inconnues que d'équations admet toujours une solution. Il n'en est pas toujours ainsi. En effet, considérons par exemple

le système des trois équations à trois inconnues

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 6 \\ 3x + y - 5z &= -8 \\ 2x + 2y - 7z &= 12 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Si l'on retranche membre à membre les deux premières équations, on obtient l'équation

$$2x + 2y - 7z = -14,$$

qui peut remplacer l'une de ces deux équations, de sorte que le système (1) est équivalent au système

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 6 \\ 2x + 2y - 7z &= -14 \\ 2x + 2y - 7z &= 12 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Mais, dans ce dernier système, la somme $2x + 2y - 7z$ doit être égale d'une part à -14, d'autre part à 12 ; donc le système (2) n'a pas de solution et il en est de même du système (1) qui lui est équivalent.

Résolution et discussion de deux équations du premier degré à deux inconnues.

96. Formules de résolution. — Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues peut être ramené à la forme

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Pour le résoudre, on peut employer l'une des deux méthodes exposées dans le chapitre précédent, par exemple la méthode de substitution. A cet effet, supposons l'un des quatre coefficients a, b, a', b' différent de zéro et soit par exemple $b \neq 0$. En tirant y de la première équation, ce qui est permis puisque $b \neq 0$, et portant dans la deuxième, on obtient le système

$$y = \frac{c - ax}{b},$$

$$a'x + \frac{b'(c - ax)}{b} = c',$$

qui est équivalent au premier. Ce système peut à son tour être remplacé par le système équivalent

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{c - ax}{b} \\ (ba' - ab')x &= bc' - cb' \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

La deuxième équation de ce système ne renferme que x; si donc le coefficient de x n'est pas nul, on peut en tirer

$$x = \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'},$$

valeur que l'on porte dans la première des équations (2), ce qui donne, après réduction,

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}.$$

Le système

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\ y &= \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

équivalent au système proposé, donne les valeurs de x et de y (on a changé les signes des numérateurs et des dénominateurs).

97. Discussion. — Théorème I. — *Lorsque le binome* $ab' - ba'$ *est différent de zéro, le système* (1) *admet une solution unique donnée par les formules* (3).

En effet, si $ab' - ba'$ est différent de zéro, l'un au moins des quatre coefficients a, b, a', b' est différent de zéro. Supposons que ce soit b; alors en recommençant le raisonnement fait plus haut, on peut remplacer le système (1) successivement par (2) et (3), qui lui sont équivalents. Or, les équations (3) donnent un système unique de valeurs de x et de y, ce qui démontre la proposition.

98. Théorème II. — *Lorsque le binome* $ab' - ba'$ *est nul et que l'un au moins des quatre coefficients* a, b, a', b' *n'est pas nul, le système n'admet pas de solutions ou en admet une infinité.*

Supposons $b \neq 0$; le système (1) est alors équivalent au système (2), dans lequel la deuxième équation se réduit à

$$0 = bc' - cb'.$$

Si donc $bc' - cb' \neq 0$, le système (2) n'a pas de solution. On dit encore qu'il est *impossible* ou que les équations proposées sont *incompatibles*.

Si au contraire $bc' - cb' = 0$, le système (2) se réduit à

une seule équation,

$$y = \frac{c - ax}{b},$$

qui fait correspondre une valeur de y à chaque valeur de x ; donc le système (2) admet une infinité de solutions, et par suite aussi le système (1) qui lui est équivalent.

99. Théorème III. — *Lorsque le binome* $ab' - ba'$ *est nul ainsi que les quatre coefficients* a, b, a', b', *le système proposé est impossible si* c *et* c' *ne sont pas nuls tous deux ; il est indéterminé dans le cas contraire.*

Ce théorème est évident.

Inégalités.

100. Définitions. — On dit qu'un nombre quelconque a est plus grand qu'un autre nombre quelconque b lorsque la différence $a - b$ est un nombre positif ; lorsque la même différence est négative, on dit que a est plus petit que b.

101. Conséquences. — De ces définitions il résulte :

1° *Que tout nombre positif est plus grand que zéro ;*

2° *Que tout nombre négatif est plus petit que zéro ;*

3° *Qu'un nombre positif est d'autant plus grand que sa valeur absolue est plus grande ;*

4° *Qu'un nombre négatif est d'autant plus petit que sa valeur absolue est plus grande.*

Lorsque la valeur absolue d'un nombre positif croît indéfiniment et de manière à devenir plus grande que toute quantité donnée, on dit que le nombre devient égal à *plus l'infini* $(+\infty)$; de même, lorsque la valeur absolue d'un nombre négatif croît indéfiniment et de manière à devenir plus grande que toute quantité donnée, on dit que le nombre devient égal à *moins l'infini* $(-\infty)$.

102. Remarque. — Pour exprimer qu'un nombre est positif, on exprime souvent qu'il est plus grand que zéro ; on exprime de même qu'un nombre est négatif en exprimant qu'il est plus petit que zéro.

103. Définition. — On dit que deux inégalités sont *équivalentes* lorsque chacune d'elles est une conséquence de l'autre.

104. **Théorème I.** — *Lorsqu'on ajoute une même quantité aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente.*

Soit, par exemple, l'inégalité

$$a > b ; \tag{1}$$

je dis qu'elle est équivalente à

$$a + m > b + m. \tag{2}$$

En effet, l'inégalité (1) est équivalente à

$$a - b > 0,$$

et l'inégalité (2) à

$$(a + m) - (b + m) > 0 ;$$

or, on a $(a + m) - (b + m) = a - b$,

donc les deux inégalités sont équivalentes.

105. **Remarque.** — La quantité m étant quelconque, on peut dire aussi qu'*on transforme une inégalité en une autre équivalente en retranchant une même quantité de ses deux membres.*

106. **Théorème II.** — *Quand on multiplie ou qu'on divise les deux membres d'une inégalité par une même quantité* POSITIVE, *on obtient une inégalité équivalente à la première.*

Soit l'inégalité

$$a < b, \tag{1}$$

et soit m une quantité positive ; je dis par exemple que

$$am < bm \tag{2}$$

est équivalente à (1). En effet, par définition la différence c entre a et b est négative ; multiplions les deux membres de l'égalité

$$a - b = c$$

par la quantité positive m ; nous obtenons

$$am - bm = cm,$$

et le second membre cm de cette nouvelle égalité est négatif puisqu'il est composé de deux facteurs dont l'un, c, est négatif et l'autre, m, est positif. Il en résulte que si l'on a

$$a - b < 0,$$

on a aussi $am - bm < 0$, et réciproquement.

Le cas de la division se démontre de même.

107. **Remarque.** — On prouverait de même que si la quantité m est négative, l'inégalité change de sens ; en l'autres termes, si l'on a $m < 0$, l'inégalité $a < b$ est équivalente à $am > bm$; pareillement, l'inégalité $a > b$ est, dans les mêmes conditions, équivalente à $am < bm$.

108. Résolution des inégalités du premier degré à une inconnue. — Les deux membres d'une inégalité peuvent être numériques ou littéraux; dans ce dernier cas, on peut se proposer de chercher entre quelles limites il faut choisir l'une des lettres qui entrent dans l'inégalité pour que celle-ci puisse avoir lieu. Chercher ces limites, c'est résoudre l'inégalité par rapport à la lettre considérée; cette lettre s'appelle l'*inconnue*, et l'on dit que l'inégalité est à une inconnue quand elle ne renferme qu'une lettre à déterminer.

Pour résoudre une inégalité à une inconnue, on commence par chasser les dénominateurs en appliquant le théorème II; puis on groupe tous les termes dans un seul membre, comme pour les équations, en appliquant le théorème I. Cela fait, si x est la lettre inconnue, et si l'inégalité peut être ramenée à l'une des formes

$$ax + b > 0 \qquad \text{ou} \qquad ax + b < 0,$$

on dit qu'elle est *du premier degré à une inconnue*. Pour achever la résolution de l'une d'elles, de $ax + b > 0$ par exemple, on l'écrit

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right) > 0.$$

Sous cette forme, le premier membre est un produit de deux facteurs, dont l'un, a, a un signe connu. Supposons-le positif. pour fixer les idées; alors, pour que le produit soit positif, il faut que le second facteur soit lui-même positif, c'est-à-dire que l'on ait $x + \frac{b}{a} > 0$, ce qui équivaut à $x > -\frac{b}{a}$. Ainsi, pour *satisfaire* à l'inégalité $ax + b > 0$ dans le cas où l'on a $a > 0$, il suffit de prendre x supérieur à $-\frac{b}{a}$. Si l'on avait $a < 0$, il suffirait de prendre x inférieur à $-\frac{b}{a}$.

109. Remarque. — Une inégalité du premier degré à une inconnue peut, d'après cela, être vérifiée par une infinité de valeurs de l'inconnue; tandis qu'une équation du premier degré à une inconnue n'a jamais plus d'une solution.

110. Exemple. — Soit à résoudre l'inégalité

$$-3x + 7 > 13.$$

Je fais d'abord passer 7 dans le second membre, ce

donne la nouvelle inégalité

$$-3x > 13 - 7 \qquad \text{ou} \qquad -3x > 6.$$

Je divise maintenant les deux membres par -3, ce qui change le sens de l'inégalité (107), et j'obtiens

$$x < -\frac{6}{3} \qquad \text{ou} \qquad x < -2.$$

Ainsi l'inégalité considérée est vérifiée quand on met à la place de x un nombre quelconque inférieur à -2.

Application à la résolution de quelques problèmes simples.

111. **Diverses parties d'un problème.** — La résolution d'un problème d'algèbre comprend trois parties : la *mise en équations*, la *résolution* des équations et la *discussion*.

Pour mettre un problème en équations, on commence par désigner par les premières lettres, a, b, c,... de l'alphabet les données du problème et par les dernières lettres, x, y, z,... les inconnues. Cela fait, quand le problème est numérique, on indique sur les données et sur les inconnues toutes les opérations qu'il faudrait faire pour vérifier les inconnues si elles étaient connues ; on est ainsi conduit à écrire des égalités entre les données et les inconnues, et ces égalités sont les équations du problème.

Quand le problème est un problème d'algèbre appliquée à la géométrie, on suit le même principe pour la mise en équations ; seulement, pour faire la vérification des inconnues, il faut commencer par établir, au moyen des théorèmes du cours de géométrie, les relations qui existent entre les données et les inconnues. En outre, avant la mise en équations, il est indispensable, si l'on veut des formules générales, de bien fixer les conventions relatives à toutes les grandeurs qui entrent dans la question et particulièrement les conventions sur les signes des grandeurs qui sont susceptibles d'être comptées dans deux sens opposés ; il faut en outre tenir compte de ces conventions dans la mise en équations.

Enfin, qu'il s'agisse d'un problème d'algèbre appliquée à la géométrie ou d'un problème numérique, il faut se rappeler que *pour que le problème soit déterminé, il faut autant d'équations qu'il y a d'inconnues.*

Le problème une fois mis en équations, on résout les équations par les procédés expliqués plus haut.

Enfin, quand les équations sont résolues, on discute le problème. On appelle *discussion* d'un problème l'examen des conditions auxquelles doivent satisfaire les données pour que le problème soit possible, l'examen des cas particuliers et du nombre des solutions.

112. Problème I. — *On a coulé dans une usine* 587 *pièces de fonte pesant, les unes* 10^{kg}, *les autres* 15^{kg}. *Le poids total étant* 7055^{kg}, *quel est le nombre de pièces de chaque espèce ?*

Soit x le nombre des pièces de 10^{kg}; puisque le nombre total des pièces est 587, le nombre des pièces de 15^{kg} sera $587 - x$, et les poids respectifs de toutes les pièces de 10^{kg} et de toutes les pièces de 15^{kg} seront $10 \times x$ et $15 \times (587 - x)$. Mais la somme de ces poids doit être égale à 7055^{kg}; on doit donc avoir

$$10x + 15(587 - x) = 7055 :$$

c'est l'équation du problème.

En appliquant la règle de résolution des équations du premier degré à une inconnue, on a

$$(10 - 15)x = 7055 - 587 \times 15$$

ou, après avoir effectué les calculs,

$$-5x = -1750 ;$$

d'où

$$x = \frac{-1750}{-5} = 350.$$

Il y a donc 350 pièces de 10^{kg} et $587 - 350 = 237$ pièces de 15^{kg}.

113. Problème II. — *En quatre années un commerçant a pu mettre de côté* 28000^{fr}. *Calculer ce qu'il a économisé chaque année sachant :*

1° *Que la deuxième année il a économisé les* $\frac{2}{9}$ *en plus de ce qu'il avait économisé la première ;*

2° *Que la troisième année il a économisé* 3820^{fr} ;

3° *Que la quatrième année il a économisé les* $\frac{2}{7}$ *en moins de ce qu'il avait économisé la deuxième.*

Soit x la somme économisée la première année ; les sommes

économisée les années suivantes seront respectivement

$$x+\frac{2}{9}x, \qquad 3820, \qquad x+\frac{2}{9}x-\frac{2}{7}\left(x+\frac{2}{9}x\right).$$

L'économie totale étant 28000^{fr}, l'équation du problème sera

$$x+x+\frac{2}{9}x+3820+x+\frac{2}{9}x-\frac{2}{7}\left(x+\frac{2}{9}x\right)=28000,$$

c'est-à-dire

$$x\left(3+\frac{4}{9}-\frac{2}{7}-\frac{4}{63}\right)=28000-3820$$

ou

$$\frac{195x}{63}=24180.$$

On en tire

$$x=\frac{24180\times 63}{195}.$$

En effectuant les calculs, on trouve $x=7812$. Ainsi l'économie de la première année est 7812^{fr}; celle de la deuxième année est $7812+\frac{2}{9}\times 7812=9548^{fr}$; celle de la troisième année est d'ailleurs 3820^{fr}, et enfin celle de la quatrième année est $9548-\frac{2}{7}\times 9548=6820^{fr}$.

Comme vérification, on voit que

$$7812+9548+3820+6820=28000.$$

114. Problème III. — *On a acheté un jour* 5^{kg} *de sucre et* 3^{kg} *de café pour* 24^{fr}, *un autre jour* 4^{kg} *de sucre et* 5^{kg} *de café pour* $34^{fr},80$. *Trouver le prix du sucre et le prix du café, sachant que ces prix n'ont pas varié.*

Soient x et y les prix respectifs du kilogramme de sucre et du kilogramme de café. On doit avoir

$$5x+3y=24,$$
$$4x+5y=34,80.$$

On tire de ces deux équations

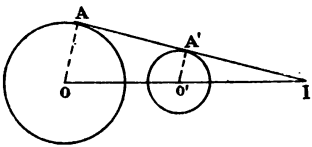
$$x=\frac{24\times 5-34,80\times 3}{13}=1,20,$$

$$y=\frac{34,80\times 5-24\times 4}{13}=6.$$

Le sucre coûte donc $1^{fr},20$ le kilog. et le café 6^{fr} le kilog.

115. Problème IV. — *Les rayons de deux circonférences* O *et* O′ *étant* R *et* R′ *et la distance de leurs centres* d, *trouver la distance du centre de la plus petite circonférence au point de rencontre des tangentes communes extérieures.*

Supposons, par exemple, R′ < R, de sorte qu'il s'agit de trouver la distance du point O′ au point de rencontre des tangentes communes extérieures. Soit donc AA′ une tangente commune extérieure touchant les circonférences respectives aux points A et A′ et rencontrant la ligne des centres au point I : on sait que le point I est le point de rencontre des tangentes communes extérieures (*Géométrie*) ; il s'agit donc de calculer O′I. Pour cela, posons $O'I = x$ et menons les rayons OA, O′A′ qui aboutissent aux points A et A′.



Nous obtenons ainsi deux triangles semblables OAI, O′A′I qui donnent

$$\frac{OA}{O'A'} = \frac{OI}{O'I},$$

c'est-à-dire

$$\frac{R}{R'} = \frac{d+x}{x}.$$

En retranchant les dénominateurs des numérateurs, on en déduit

$$\frac{R-R'}{R'} = \frac{d}{x};$$

d'où l'on tire, si $R - R' \neq 0$,

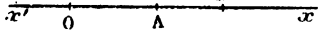
$$x = \frac{d.R'}{R-R'}.$$

Si $R - R' = 0$, la mise en équation que nous avons adoptée n'a plus de sens, parce qu'alors les deux circonférences sont égales et les triangles OAI, O′A′I n'existent plus. En d'autres termes, les deux droites OO′ et AA′ étant parallèles, le problème n'a plus de solution.

116. Problème V. — *Deux mobiles parcourent une droite indéfinie x′x d'un mouvement uniforme, le premier*

avec la vitesse v, le deuxième avec la vitesse v'. Au même instant ils sont l'un en A *et l'autre en* A'*; trouver sur x'x le point où ils se rencontrent, et trouver l'époque de leur rencontre.*

Soit O un point fixe sur la droite $x'x$; nous fixerons la position d'un point quelconque A de cette droite au moyen du segment algébrique OA, compté à partir du point O, positivement dans le sens $x'x$, négativement en sens opposé ; soient alors a et a' les valeurs algébriques des segments OA et OA'.



Appelons M le point de rencontre des deux mobiles et désignons par x la valeur algébrique du segment OM, c'est-à-dire l'inconnue du problème.

Chacun des deux mobiles peut se déplacer sur $x'x$, soit de gauche à droite, soit de droite à gauche. *Convenons* de considérer sa vitesse comme positive dans le premier cas et comme négative dans le second. Enfin, comptons le temps à partir de l'instant où les mobiles sont en A et en A', positivement s'il est postérieur à cet instant, négativement s'il est antérieur; appelons d'ailleurs t le nombre, positif ou négatif, d'unités de temps écoulées de l'instant origine à l'instant de rencontre des deux mobiles.

Cela posé, nous avons deux inconnues à déterminer, x et t; il faut donc deux équations, et ces équations s'obtiennent au moyen de la formule du mouvement uniforme établie au n° 46 . Cette formule, appliquée successivement aux deux mobiles, nous donne en effet

$$\left.\begin{aligned} x &= a + vt \\ x &= a' + v't \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

La résolution de ces deux équations se fait sans difficulté, en remplaçant le système (1) par le système équivalent

$$\left.\begin{aligned} x &= a + vt \\ a + vt &= a' + v't \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

qui conduit à distinguer deux cas, suivant que l'on a $v - v' \neq 0$ ou $v - v' = 0$.

Dans le premier cas, on tire du système (2)

$$x = \frac{va' - av'}{v - v'} \quad /$$
$$t = \frac{a' - a}{v - v'} \quad \backslash \qquad (3)$$

et le problème admet une solution et n'en admet qu'une.

Dans le second cas, la deuxième équation (2) ne peut être satisfaite que si l'on a $a = a'$, de sorte que si $v = v'$ et $a \neq a'$, le problème est impossible, les mobiles ne se rencontrent jamais; si $v = v'$ et $a = a'$, le problème admet une infinité de solutions, car on n'a plus qu'une seule équation, $x = a + vt$, pour déterminer deux inconnues. Dans ce cas d'ailleurs, les mobiles partent du même point avec la même vitesse et se déplacent dans le même sens ; donc ils ne se séparent jamais et c'est ce qui explique l'indétermination du problème.

Ajoutons que, grâce aux conventions posées au début, les formules (3) donnent la solution du problème dans tous les cas, quand il n'y a qu'une solution. Par exemple, supposons que la vitesse du premier mobile soit 2^m par seconde, que la vitesse du deuxième soit -3^m par seconde, que l'on ait $a = 25^m$ et $a' = 5^m$.

Les formules (3) nous donneront

$$x = \frac{10 + 75}{5} = 17,$$

$$t = -\frac{20}{5} = -4 ;$$

ce qui veut dire que le point de rencontre est à 17^m à droite du point O et que la rencontre a eu lieu 4 secondes avant le passage des mobiles en A et A'.

LIVRE III

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE

Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$; relations entre les coefficients et les racines.

117. **Considérations préliminaires.** — On montre en Arithmétique que si A est un nombre arithmétique, il existe un autre nombre arithmétique a et un seul dont le carré est égal à A. Ce nombre a s'appelle la *racine carrée arithmétique* du nombre A et se représente par le symbole $\sqrt{A}$, de sorte qu'il revient au même d'écrire l'égalité $a=\sqrt{A}$ ou d'écrire l'égalité $a^2=A$.

Supposons maintenant que A soit un nombre algébrique ; il y a deux cas à examiner, suivant qu'il est positif ou négatif.

Premier cas. A *est positif*. — On peut désigner par A sa valeur absolue et par a la racine carrée arithmétique de A. Les deux nombres égaux et de signes contraires a et $-a$ satisfont à l'égalité

$$a^2=(-a)^2,$$

et, comme $a^2=A$, on a aussi $(-a)^2=A$; il en résulte qu'il y a deux nombres égaux et de signes contraires dont le carré est égal à A, et ces deux nombres égaux et de signes contraires ont pour valeur absolue la racine carrée arithmétique de A. Il n'y en a pas d'autres ; car tout nombre positif ou négatif dont le carré est égal à A doit avoir pour valeur absolue la valeur de la racine carrée arithmétique de A. On peut donc dire, d'après cela, qu'un nombre positif A a *deux racines carrées algébriques* ; on les représente par le symbole $\pm\sqrt{A}$, que l'on énonce *plus* et *moins* racine de A.

Deuxième cas. A *est négatif*. — Le carré d'un nombre po-

sitif ou négatif étant toujours positif, il n'existe pas de nombre positif ou négatif dont le carré soit égal à un nombre négatif A.

Cela posé, une équation à une inconnue est du second degré quand on peut la ramener à la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dans laquelle a, b, c sont des nombres quelconques, supposés connus.

Résoudre cette équation, c'est trouver tous les nombres positifs ou négatifs qui, mis à la place de x, rendent identiques les deux membres de l'équation. Nous allons résoudre ce problème quand il est possible. Traitons d'abord quelques exemples numériques.

118. Exemple I. — *Résoudre l'équation*

$$2x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Il s'agit de trouver les nombres qui, mis à la place de x, annulent l'expression $2x^2 + 3x - 2$.

Pour trouver ces nombres, remarquons que cette expression peut s'écrire $2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right)$. Or $x^2 + \frac{3}{2}x$ est la somme des deux premiers termes du carré de $x + \frac{3}{4}$. Le carré complet étant égal à $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$, en ajoutant et en retranchant $\frac{9}{16}$ à la quantité entre parenthèses, on voit que l'expression $2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right)$ est équivalente à $2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 1\right]$ ou à $2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right]$. Mais la quantité entre crochets étant une différence de deux carrés, cette nouvelle expression peut (69) s'écrire $2\left(x + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right)$ ou $2\left(x + 2\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Il en résulte que résoudre l'équation proposée revient à trouver les valeurs de x qui annulent le produit $2\left(x + 2\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Or ce produit ne peut s'annuler que

si l'on a soit $x+2=0$, soit $x-\frac{1}{2}=0$, ce qui donne $x=-2$ et $x=\frac{1}{2}$, et ce sont là les seules valeurs de x répondant à la question. L'équation proposée admet donc deux racines.

119. Exemple II. — *Résoudre l'équation*

$$2x^2-12x+18=0.$$

En opérant comme pour l'exemple précédent, on voit que l'expression $2x^2-12x+18$ peut s'écrire

$$2(x-3)^2.$$

Cette expression ne peut être nulle que si l'on a $x-3=0$, d'où $x=3$, de sorte que l'équation proposée n'admet qu'une racine.

120. Exemple III. — *Résoudre l'équation*

$$2x^2-8x+20=0.$$

On voit, comme pour le premier exemple, que l'expression $2x^2-8x+20$ peut s'écrire successivement

$$2(x^2-4x+10)$$

et

$$2[(x-2)^2+6].$$

Mais, sous cette forme, l'expression considérée est le produit de 2 par une somme de deux nombres positifs, $(x-2)^2$ et 6. Ce produit ne peut donc jamais être nul, puisque aucun des facteurs qui le composent ne peut être nul. Il en résulte que l'équation considérée n'a pas de racines.

Ces exemples rendront plus claires les explications données dans le cas général, dont nous allons maintenant nous occuper.

121. Cas général. — *Résolution de l'équation*

$$ax^2+bx+c=0.$$

Nous supposerons, bien entendu, $a\neq 0$, car si a était nul l'équation ne serait pas du second degré. Nous pouvons aussi supposer $a>0$, car si a était plus petit que zéro, il n'y aurait qu'à changer les signes de tous les termes de l'équation.

Cela posé, observons que le problème à résoudre consiste à trouver, s'ils existent, tous les nombres positifs ou négatifs

qui annulent l'expression $ax^2 + bx + c$. A cet effet, il y a avantage à transformer cette expression en une autre équivalente, et on y arrive de la manière suivante :

On met d'abord a en facteur, ce qui transforme l'expression en une autre, $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$; on observe ensuite que dans la parenthèse, les deux premiers termes sont les deux premiers termes du carré de $x + \frac{b}{2a}$, et comme la parenthèse ne change pas si l'on ajoute et si l'on retranche $\frac{b^2}{4a^2}$, on voit que l'expression peut s'écrire successivement

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

et

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Trois cas peuvent alors se présenter suivant le signe et la valeur du binome $4ac - b^2$ ou, ce qui revient au même, et pour nous conformer à ce que l'on fait habituellement, suivant le signe et la valeur du binome $b^2 - 4ac$.

PREMIER CAS. $b^2 - 4ac < 0$. — Alors $4ac - b^2$ et $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ sont positifs; l'expression $ax^2 + bx + c$ est équivalente au produit par a d'une somme composée d'un carré, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, et d'un nombre positif, $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$, qui ne contient pas x et qui n'est pas nul. Par conséquent, puisque $a \neq 0$, il n'existe aucun nombre soit positif soit négatif qui, mis à la place de x, annule l'expression, et l'équation proposée *n'a pas de solution*.

L'exemple III traité plus haut rentre dans ce cas.

DEUXIÈME CAS. $b^2 - 4ac = 0$. — L'expression $ax^2 + bx + c$ est alors équivalente à $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$; comme $a \neq 0$, cette expression ne peut être nulle que si l'on a $x + \frac{b}{2a} = 0$,

c'est-à-dire $x = -\frac{b}{2a}$. Dans ce cas le problème admet une solution unique, $x = -\frac{b}{2a}$.

L'exemple II traité plus haut rentre dans ce cas.

TROISIÈME CAS. $b^2 - 4ac > 0$. — Alors l'expression $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right];$$

or, si l'on désigne par le symbole $\sqrt{b^2 - 4ac}$ la racine carrée arithmétique du nombre positif $b^2 - 4ac$, on a

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2,$$

et par suite

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right].$$

Mais sous cette forme la quantité entre crochets est une différence de deux carrés et on peut la remplacer (69) par le produit

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right),$$

de sorte que l'expression $ax^2 + bx + c$ est équivalente au produit de trois facteurs

$$a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Or, pour que ce produit soit nul, il faut et il suffit que l'un des trois facteurs soit nul ; le premier, a, n'est pas nul par hypothèse ; donc il faut et il suffit que l'un des deux autres soit nul. Donc les valeurs de x qui satisfont à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les mêmes que les valeurs de x pour lesquelles on a, soit $x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$, soit $x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$. Mais chacune de ces égalités est une équation du premier degré à une inconnue et qui admet une solution unique,

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pour la première, et

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pour la deuxième. L'équation proposée admet donc *deux racines* et *deux seulement*, données par la formule unique

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

122. Remarque I. — Lorsque $b^2 - 4ac < 0$, on dit, pour des raisons que nous n'avons pas à donner ici, que l'équation a deux racines *imaginaires* ; par opposition, on dit que l'équation a deux racines *réelles* lorsque $b^2 - 4ac > 0$.

Dans ce dernier cas on ajoute que les racines sont *distinctes*, parce que si on les appelle x' et x'' et si l'on pose

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

leur différence $x'' - x'$ est égale à $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$ et n'est pas nulle.

Enfin lorsque $b^2 - 4ac = 0$, on dit que les deux racines sont *égales* ou que l'équation *a deux racines égales*, parce que si $b^2 - 4ac$ tend vers zéro par des valeurs positives, la différence des deux racines tend aussi vers zéro.

123. Remarque II. — La formule de résolution se simplifie lorsque b est pair ; si l'on pose en effet $b = 2b'$, elle devient

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Elle se simplifie également quand l'équation est mise sous la forme

$$x^2 + px + q = 0.$$

Dans ce cas elle devient

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

124. Remarque III. — Lorsque a et c sont de signes contraires, les racines sont toujours réelles et distinctes, car dans ce cas on a nécessairement $b^2 - 4ac > 0$.

125. Cas où l'équation est incomplète. — La résolution de l'équation se simplifie quand l'équation est incom-

plète. Si par exemple on a $c = 0$, l'équation s'écrit $x(ax + b) = 0$, et, pour que le produit $x(ax + b)$ soit nul, il faut et il suffit que l'on ait soit $x = 0$, soit $x = -\frac{b}{a}$; les deux racines sont donc zéro et $-\frac{b}{a}$.

Si b tout seul est nul, l'équation s'écrit $ax^2 + c = 0$ et se met sous la forme $x^2 = A$, A désignant un nombre positif ou négatif. Le problème de la résolution de l'équation est alors identique à celui de la recherche de la racine carrée algébrique de A ; si donc $A > 0$, on a deux solutions, $\pm\sqrt{A}$, et pas de solution si $A < 0$.

126. Exemples. — 1° Soit à résoudre l'équation

$$3x^2 - 5x + 7 = 0.$$

Dans cette équation on a

$$b^2 - 4ac = 25 - 12 \times 7 = 25 - 84.$$

Cette différence étant négative, l'équation a ses racines imaginaires, c'est-à-dire n'a pas de racines.

2° Prenons l'équation $\frac{2x - 4}{x} = x - 3$. Si l'on chasse le dénominateur et si l'on fait passer tous les termes dans le second membre, on obtient, après réductions, l'équation $0 = x^2 - 5x + 4$ ou, en renversant les deux membres, $x^2 - 5x + 4 = 0$. On a ici $b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9$; et comme ce résultat est positif, l'équation a deux racines, données par la formule

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2};$$

ce qui donne, en séparant,

$$x' = \frac{5 + 3}{2} = 4,$$

$$x'' = \frac{5 - 3}{2} = 1.$$

127. Relations entre les coefficients et les racines. — Les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont, ainsi que nous venons de le voir,

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si l'on ajoute ces égalités membre à membre et si l'on réduit, on obtient

$$x' + x'' = -\frac{b}{a};$$

de même, si l'on multiplie membre à membre, on obtient, après réduction,

$$x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Ces deux formules constituent ce qu'on appelle les *relations entre les coefficients et les racines*. Elles sont très importantes et s'énoncent ainsi :

La somme des racines est égale au coefficient de x changé de signe divisé par le coefficient de x^2 ;

Le produit des racines est égal au terme connu divisé par le coefficient de x^2.

D'après cela, dans l'équation

$$x^2 - 3x - 1 = 0,$$

dont les racines sont réelles, le produit des racines est -1 et la somme est 3 ; de même dans l'équation

$$3x^2 + 4x + 1 = 0,$$

dont les racines sont aussi réelles, le produit de ces racines est $\frac{1}{3}$ et la somme est $-\frac{4}{3}$, et ainsi de suite.

128. Signes des racines d'une équation du second degré. — Supposons qu'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ait ses *racines réelles et distinctes* et cherchons les signes de ces racines sans résoudre l'équation. Pour cela, examinons *d'abord* le signe du produit $\frac{c}{a}$; si ce produit est négatif, les racines sont de signes contraires et le problème est résolu. Supposons donc $\frac{c}{a} > 0$; dans ce cas, les racines sont toutes deux positives, ou toutes deux négatives. Si elles sont toutes deux positives, la somme $-\frac{b}{a}$ est positive ; si elles sont toutes deux négatives, la somme $-\frac{b}{a}$ est négative. Mais alors les réciproques sont vraies ; par conséquent :

1° Si $\frac{c}{a} > 0$ ainsi que $-\frac{b}{a}$, les deux racines sont positives ;

2° Si $\frac{c}{a} > 0$ et $-\frac{b}{a} < 0$, les deux racines sont négatives.

Avant d'appliquer ces caractères, il faut bien entendu s'assurer que l'équation a ses racines réelles; le problème n'a pas de sens quand les racines sont imaginaires.

Par exemple, si l'on considère l'équation

$$2x^2 - 3x - 7 = 0,$$

on voit : 1° que ses racines sont réelles parce que les termes extrêmes sont de signes contraires (124); 2° que le produit des racines est négatif puisqu'il est égal à $-\frac{7}{2}$; donc l'équation a une racine positive et une racine négative.

Si l'on considère maintenant l'équation

$$3x^2 - 6x + 2 = 0,$$

dont les racines sont réelles parce que $b'^2 - ac = 9 - 6$, le produit des racines de cette équation étant $\frac{2}{3}$ est positif ; donc les deux racines sont de même signe. Mais la somme $\frac{6}{3} = 2$ étant elle-même positive, ces deux racines sont positives. Enfin, on voit de la même manière que l'équation

$$3x^2 + 6x + 2 = 0$$

a deux racines négatives, parce que le produit est positif et que la somme est négative.

129. Problème. — *Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit.*

Soient y et z les deux nombres, s leur somme et p leur produit ; on doit avoir

$$\left.\begin{aligned} y + z &= s \\ yz &= p \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

et les nombres cherchés sont ceux qui vérifient ces deux équations. Or, ce système est équivalent au suivant :

$$z = s - y,$$
$$y(s - y) = p,$$

ou bien au système

$$\left.\begin{aligned} z &= s - y \\ y^2 - sy + p &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

La seconde équation de ce système est une équation du second degré ; si elle a ses racines imaginaires, le problème est impossible. Supposons qu'elle ait ses racines réelles et appelons-les y' et y'' ; on en déduit les valeurs correspondantes de z :

$$z' = s - y',$$
$$z'' = s - y'',$$

de sorte que le problème a deux solutions,

$$y' \quad \text{et} \quad s - y',$$
$$y'' \quad \text{et} \quad s - y''.$$

Mais en vertu des relations entre les coefficients et les racines de la seconde équation (2), on a $y' + y'' = s$, par suite $s - y' = y''$ et $s - y'' = y'$; de sorte que les deux solutions sont constituées toutes les deux par les deux nombres y' et y''. Ainsi le problème n'admet qu'une solution et les deux nombres cherchés sont les racines de l'équation $x^2 - sx + p = 0$, qui n'est autre que la deuxième équation (2) dans laquelle y a été remplacé par x. *Il est bon de remarquer que le coefficient de x est égal à la somme des deux nombres changée de signe, et le terme connu au produit de ces deux nombres.*

130. **Remarque.** — Les relations entre les coefficients et les racines permettent aussi de résoudre la question suivante :

Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients d'une équation du second degré pour que les racines soient liées entre elles par une relation donnée à l'avance.

Prenons par exemple l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

et cherchons à quelle condition doivent satisfaire p et q pour que l'une des racines soit double de l'autre. Soient x' et x'' les deux racines ; on doit avoir

$$x'' = 2x',$$

d'après l'énoncé, et

$$x' + x'' = -p,$$
$$x'x'' = q,$$

en vertu des relations entre les coefficients et les racines. De deux de ces trois équations, *pourvu qu'elles ne soient pas toutes deux les relations entre les coefficients et les racines*, on tire x' et x'', puis on porte dans la troisième et l'on obtient la relation cherchée. Ici nous tirerons x' et x'' des deux premières, ce qui donne

$$x' = -\frac{p}{3}, \qquad x'' = -\frac{2p}{3};$$

en portant dans la troisième, on obtient

$$\frac{4p^2}{9} = q :$$

c'est la condition demandée.

Problèmes du second degré.

131. **Problème I.** — *On sait que le son parcourt dans l'air* 340^m *par seconde d'un mouvement uniforme ; on sait, d'autre part, qu'un corps qui tombe pendant t secondes parcourt un espace égal à* $\frac{1}{2}gt^2$, *g désignant l'accélération due à la pesanteur et égale à* $9^m,8096$. *Cela posé, on laisse tomber une pierre au fond d'un puits, et on observe le temps t qui s'écoule entre l'instant où on lâche la pierre et celui où l'on entend le bruit de sa chute au fond du puits ; trouver la profondeur du puits.*

Soit x la profondeur du puits. Si l'on désigne par t' le temps que la pierre met à descendre au fond du puits, on a

$$x = \frac{1}{2}gt'^2.$$

D'autre part, si l'on appelle t'' le temps mis par le son pour parcourir la distance x, on a aussi

$$x = vt'',$$

en posant $340 = v$.

On a enfin

$$t = t' + t''.$$

De ces deux dernières équations on tire

$$t'' = \frac{x}{v},$$

$$t' = t - t'' = t - \frac{x}{v}$$

En portant alors la valeur trouvée pour t' dans la première équation on obtient

$$x = \frac{1}{2} g \left(t - \frac{x}{v} \right)^2 .$$

Cette équation, qui détermine x, s'écrit d'ailleurs successivement

$$\frac{2x}{g} = \left(t - \frac{x}{v} \right)^2 ,$$

$$\frac{2x}{g} = t^2 - \frac{2tx}{v} + \frac{x^2}{v^2} ,$$

et enfin, en ordonnant par rapport à x, après avoir multiplié les deux membres par v^2,

$$x^2 - 2v \left(t + \frac{v}{g} \right) x + v^2 t^2 = 0.$$

Elle donne, après réductions,

$$x = v \left[t + \frac{v}{g} \pm \sqrt{\frac{v}{g} \left(2t + \frac{v}{g} \right)} \right].$$

On trouve ainsi deux valeurs de x qui sont réelles puisque la quantité sous le radical est positive, et qui sont positives puisque le produit $v^2 t^2$ et la somme $2v \left(t + \frac{v}{g} \right)$ sont positifs. Mais il est évident, *a priori*, que le problème n'admet qu'une solution ; par conséquent une seule des valeurs trouvées convient au problème. Pour savoir laquelle, on revient à la valeur de t' exprimée à l'aide de x. Il est clair que cette valeur de t' doit être positive ; on doit donc avoir

$$t - \frac{x}{v} > 0.$$

Or, la formule trouvée nous donne deux valeurs pour $t - \frac{x}{v}$; car on en tire, d'abord

$$\frac{x}{v} - t = \frac{v}{g} \pm \sqrt{\frac{v}{g} \left(2t + \frac{v}{g} \right)},$$

et ensuite, en changeant les signes,

$$t-\frac{x}{v}=-\frac{v}{g}\mp\sqrt{\frac{v}{g}\left(2t+\frac{v}{g}\right)}.$$

L'une de ces valeurs étant négative, on doit prendre l'autre, c'est-à-dire

$$t-\frac{x}{v}=-\frac{v}{g}+\sqrt{\frac{v}{g}\left(2t+\frac{v}{g}\right)},$$

qui provient de

$$x=v\left[t+\frac{v}{g}-\sqrt{\frac{v}{g}\left(2t+\frac{v}{g}\right)}\right].$$

En remplaçant t, v et g par leurs valeurs respectives, dans cette formule, on aura la valeur de x.

132. **Problème II.** — *Calculer les deux côtés d'un rectangle, connaissant le périmètre et la surface du rectangle.*

Soient x et y les deux côtés inconnus, $2p$ le périmètre et a^2 la surface du rectangle. Les deux côtés du rectangle formant le demi-périmètre de cette figure, on doit avoir

$$x+y=p.$$

D'autre part, la surface du rectangle étant exprimée par le produit xy, on doit avoir aussi

$$xy=a^2.$$

Nous avons donc à trouver deux nombres, connaissant leur somme et leur produit. Ces deux nombres sont (129) les racines de l'équation du second degré

$$X^2-pX+a^2=0,$$

de sorte que les deux côtés sont respectivement

$$\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-a^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-a^2}.$$

Pour que le problème soit possible il faut que les deux racines trouvées soient réelles et positives. Pour qu'elles soient réelles il faut que $\frac{p^2}{4}-a^2$ soit positif. D'ailleurs, si cette condition est remplie, les racines sont positives, puisque le produit et la somme sont positifs. Donc, pour que le

problème soit possible, il faut et il suffit que l'on ait

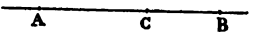
$$\frac{p^2}{4} - a^2 > 0.$$

133. Problème III. — *Partager une droite* AB *en moyenne et extrême raison.*

Il s'agit de trouver, sur la droite indéfinie AB, tous les points C tels que l'on ait

$$\overline{AC}^2 = AB \times CB,$$

le produit $AB \times CB$ étant d'ailleurs considéré comme positif ou comme négatif suivant que les deux segments AB et CB sont de même sens ou de sens contraires.



Sur la droite AB prenons le point A comme origine, le sens de A vers B comme sens positif et soient alors x et a les distances respectives des points C et B au point A.

Quelle que soit la position du point C, on a

$$AB + BC + CA = 0,$$

c'est-à-dire

$$a + BC - x = 0 ;$$

d'où

$$BC = x - a$$

et

$$CB = a - x,$$

puisque CB est égal et de sens contraire à BC. L'équation du problème est donc, dans tous les cas,

$$x^2 = a(a - x)$$

ou

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Elle donne pour x deux valeurs qui sont réelles, puisque les termes extrêmes sont de signes contraires, et qui sont de signes contraires, puisque le produit $-a^2$ des racines est négatif.

Il y a donc deux points qui répondent à la question et qui sont situés, l'un à droite du point A, l'autre à gauche de ce point : le premier est celui qui correspond à la racine positive, et le second celui qui correspond à la racine négative.

Au reste, les distances de ces points au point A sont respectivement

$$-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2},$$

$$-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=-\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

On s'assure facilement que la première valeur est inférieure à a, de sorte que le premier point est entre A et B.

TABLE

LIVRE I : Calcul algébrique.

Pages

Emploi des lettres pour représenter les inconnues. — Problèmes simples 1

Emploi des lettres pour représenter les données. — Formules algébriques 5

Nombres positifs et nombres négatifs. 10

Opérations sur les nombres positifs et sur les nombres négatifs. 13

Fractions algébriques. 29

Expressions algébriques. 32

Addition, soustraction et multiplication algébriques. 35

Division algébrique. 37

LIVRE II : Équations du Premier degré. Problèmes.

Principes généraux sur les équations. 39

Résolution d'une équation ou d'un système d'équations du premier degré 45

Résolution et discussion de deux équations du premier degré à deux inconnues. 52

Inégalités. 54

Application à la résolution de quelques problèmes simples . 57

LIVRE III : Équations du Second degré à une inconnue.

Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$; relations entre les coefficients et les racines. 63

Problèmes du second degré. 73

[111.]

GÉOMÉTRIE

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1. **Volume, surface, ligne et point.** — On appelle *volume* d'un corps la portion de l'espace occupée par ce corps.

Un corps étant limité de toutes parts, on appelle *surface* de ce corps ce qui sépare son volume de l'espace environnant.

On appelle *ligne* la limite d'une portion de surface ou la limite de séparation de deux surfaces qui se coupent, ou encore, si l'on veut, l'intersection de deux surfaces.

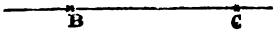
Enfin, on appelle *point* la limite de séparation de deux lignes qui se rencontrent.

« Ces idées de *surface*, de *ligne* et de *point* étant une fois acquises par la considération des corps, la surface, la ligne et le point peuvent être conçus indépendamment du corps, des surfaces et des lignes, dont ils constituent les limites(*). » On arrive ainsi à considérer une ligne comme décrite par un point, une surface et un volume comme décrits respectivement par une ligne et par une surface.

2. Ligne droite. — Il y a plusieurs sortes de lignes; la plus simple de toutes est la *ligne droite*. La notion de ligne droite est une notion première, et un fil tendu nous offre l'image de cette ligne.

On admet que *par deux points on peut mener une droite et une seule, s'étendant d'ailleurs indéfiniment de part et d'autre de ces deux points.* Il en résulte que *deux droites indéfinies qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue,* et que *deux droites distinctes ne peuvent avoir plus d'un point commun.*

On nomme un point à l'aide d'une lettre placée à côté de ce point, et une ligne droite à l'aide de deux points de cette droite.



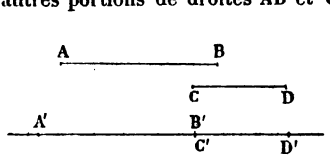
On dira donc : le point A..., la droite BC.

On dit que deux portions de droites ont des *longueurs égales*

(*) Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie.*

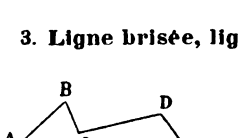
ou *sont égales* quand on peut concevoir un déplacement en vertu duquel elles viennent coïncider.

On dit qu'une portion de droite EF est la *somme* de deux autres portions de droites AB et CD lorsque, en plaçant AB et CD sur une droite indéfinie à la suite l'une de l'autre, en A'B' et en C'D', on obtient une portion de droite A'D' égale à EF.



On définit d'une manière analogue une portion de droite somme de plusieurs autres.

3. Ligne brisée, ligne courbe. — Une ligne *brisée* est une ligne composée de morceaux de lignes droites ; une ligne *courbe* est une ligne qui n'est ni droite ni brisée.



La ligne ABCDE est une ligne brisée, et la ligne PQR est une ligne courbe.

4. Plan. — De même qu'il y a plusieurs sortes de lignes, il y a aussi plusieurs sortes de surfaces. La plus simple de toutes, c'est le *plan*. On définit le plan : une surface telle qu'elle contient une droite indéfinie dès qu'elle en contient deux points. Une glace polie et qui s'étendrait indéfiniment dans tous les sens nous offre l'image d'un plan.

Une surface formée de morceaux de plans s'appelle une surface *brisée*, et une surface qui n'est ni plane ni brisée s'appelle une surface *courbe*.

5. Figures. — Tout assemblage de points, de lignes ou de surfaces constitue ce qu'on appelle une *figure*. Les points, les lignes et les surfaces sont les *éléments* de la figure.

On dit que deux figures sont *égales* quand on peut concevoir une opération par laquelle elles viennent coïncider.

Une figure est dite *plane* quand tous ses éléments sont dans un plan.

6. Objet de la géométrie. — La *géométrie* a pour objet l'étude des propriétés des figures. Elle comprend deux par-

ties : la *géométrie plane*, qui a pour objet l'étude des figures planes, et la *géométrie dans l'espace*, qui a pour objet l'étude des figures non planes.

7. **Termes employés en géométrie.** — On appelle *proposition* l'énoncé d'une vérité. Toute proposition comprend deux parties : une *hypothèse* et une *conclusion*.

On appelle *axiome* une proposition évidente.

On appelle *théorème* une proposition dont la conclusion résulte de l'hypothèse à la suite d'un raisonnement qu'on appelle la *démonstration* du théorème.

On appelle *corollaire* une proposition qui résulte d'une autre déjà démontrée.

On dit que deux propositions sont *réciproques* quand l'hypothèse de l'une est la conclusion de l'autre, et vice-versâ.

GÉOMÉTRIE PLANE

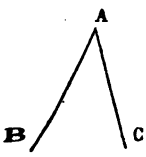
LIVRE I

LA LIGNE DROITE

Les angles.

8. **Définition d'un angle; angle nul.** — On appelle *angle* la figure formée par deux droites qui se coupent et dont chacune est limitée d'un côté à son point d'intersection avec l'autre. Les deux droites s'appellent les côtés de l'angle; leur point de rencontre est le *sommet*.

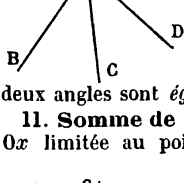
On nomme un angle soit par une lettre placée au sommet, soit par trois lettres placées respectivement sur les côtés et au sommet. En énonçant les lettres, on a d'ailleurs soin de placer au milieu la lettre qui est au sommet. Cette manière de désigner les angles est employée quand il y a plusieurs angles ayant le même sommet; sinon la lettre du sommet suffit.



D'après cela, on dira l'angle A ou l'angle BAC.

On dit qu'un angle est *nul* quand ses côtés coïncident.

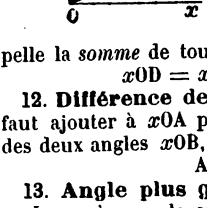
9. Angles adjacents. — On dit que deux angles sont *adjacents* quand ils ont le même sommet, un côté commun et qu'ils sont de part et d'autre de ce côté.



Les angles BAC et CAD sont deux angles adjacents.

10. Angles égaux. — On dit que deux angles sont *égaux* quand ils sont superposables.

11. Somme de deux angles. — Considérons une droite $0x$ limitée au point 0 d'un côté et indéfinie de l'autre : une telle droite s'appelle une *demi-droite*. Supposons qu'une autre demi-droite tourne autour du point 0 dans un sens déterminé. Si 0A, 0B, 0C, 0D sont quelques-unes des positions occupées par cette droite mobile, on a plusieurs angles, $x0A$, A0B, B0C, C0D : l'angle $x0D$ s'appelle la *somme* de tous ces angles, et l'on écrit



$$x0D = x0A + A0B + B0C + C0D.$$

12. Différence de deux angles. — L'angle AOB qu'il faut ajouter à $x0A$ pour obtenir $x0B$ s'appelle la *différence* des deux angles $x0B$, $x0A$, et l'on écrit

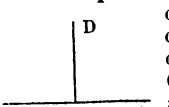
$$A0B = x0B - x0A.$$

13. Angle plus grand ou plus petit qu'un autre. — Lorsqu'un angle est la somme de deux autres, il est *plus grand* que chacun d'eux, et chacun de ceux-ci est *plus petit* que l'angle considéré. Ainsi, par exemple, $x0B$ est plus grand que $x0A$, et l'on écrit indifféremment

$$x0B > x0A \qquad \text{ou} \qquad x0A < x0B,$$

les signes $>$ et $<$ s'énonçant comme en arithmétique et en algèbre.

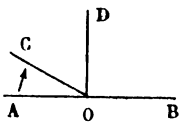
14. Perpendiculaire et oblique. — On dit qu'une demi-droite CD est *perpendiculaire* sur une droite AB lorsqu'elle forme avec celle-ci deux angles adjacents ACD et BCD égaux. Chacun de ces angles s'appelle alors un angle *droit*. Si les deux angles ACD et BCD ne sont pas égaux, la demi-droite CD est dite *oblique* à la droite AB.



Il n'est pas évident qu'il existe des demi-droites perpendiculaires sur une droite, mais le théorème suivant prouve l'existence de ces perpendiculaires.

15. Théorème. — *Par un point* O *pris sur une droite* AB *on peut mener d'un côté de* AB *une demi-droite perpendiculaire à* AB, *et on n'en peut mener qu'une.*

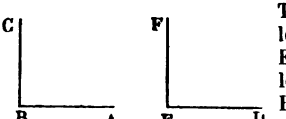
Supposons en effet qu'une demi-droite OC tourne autour du point O dans le sens de la flèche. Dans chacune de ses positions cette demi-droite fait avec AB deux angles adjacents AOC et COB. Quand elle tourne dans le sens indiqué, de OA vers OB, le premier angle, qui est nul quand OC coïncide avec OA, va en augmentant, tandis que le second diminue et devient nul quand OC coïncide avec OB. Le premier angle, d'abord plus petit que le second, devient donc plus grand que lui; par suite il existe une position OD de OC pour laquelle les deux angles sont égaux. OD est alors perpendiculaire à AB.



Ainsi, on peut mener d'un côté de AB une demi-droite perpendiculaire à AB. On n'en peut mener qu'une; car pour toute autre demi-droite OC, située par rapport à AB du même côté que OD, on a $AOC < AOD$ et $BOC > BOD$; or, AOD étant égal à BOD, puisque OD est perpendiculaire à AB, ceci revient à dire que AOC est plus petit que BOC et, par suite, que OC est oblique à AB.

16. Corollaire. — *Tous les angles droits sont égaux.*

Soit à démontrer l'égalité des deux angles droits ABC, DEF. Transportons le second angle sur le premier de manière à placer ED sur BA, le point E en B, et le côté EF du même côté que BC par rapport à AB. Alors EF coïncidera nécessairement avec BC, car s'il n'en était pas ainsi, on pourrait, du point B et du même côté de AB, mener deux demi-droites perpendiculaires à AB, ce qui est impossible en vertu du théorème précédent.

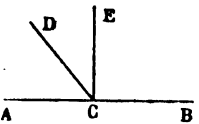


17. Définitions. — On dit qu'un angle est *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est inférieur ou supérieur à un angle droit.

On dit que deux angles sont *complémentaires* ou *supplé-*

mentaires lorsque leur somme est égale à un ou à deux angles droits.

18. Théorème. — *Toute demi-droite qui rencontre une droite indéfinie forme avec celle-ci deux angles adjacents supplémentaires.*



Soit la demi-droite CD qui rencontre la droite indéfinie AB. Il s'agit de prouver que

$$ACD + DCB = 2^{dr}.$$

Pour cela, menons la demi-droite CE perpendiculaire à AB située du même côté que CD, et observons que l'on a

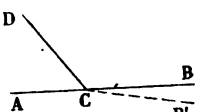
$$ACD = 1^{dr} - DCE,$$
$$DCB = 1^{dr} + DCE;$$

d'où l'on déduit, en ajoutant membre à membre,

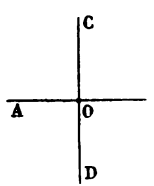
$$ACD + DCB = 2^{dr}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

19. Théorème. — *Réciproquement, si deux angles adjacents* ACD, BCD *sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs* CA, CB *sont en ligne droite.*

Si, en effet, CB′ est le prolongement de CA, l'angle DCB′ est le supplément de l'angle ACD, en vertu de la proposition directe. Et comme DCB est déjà le supplément de ACD, les deux angles DCB et DCB′ sont égaux. Or ils ont un côté commun, CD; de plus ils sont situés du même côté par rapport à CD; donc CB coïncide avec CB′. C. Q. F. D.



20. Corollaire I. — *Si par un point* O *pris sur une droite* AB *on mène les deux demi-droites* OC, OD *perpendiculaires à* AB *et de part et d'autre de* AB, *ces deux demi-droites sont dans le prolongement l'une de l'autre.*



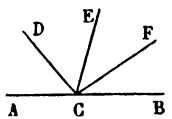
Car les angles AOC et AOD sont adjacents et supplémentaires.

Il suit de là que si l'une des demi-droites OC, OD est perpendiculaire à AB, inversement l'une quelconque des demi-droites OA, OB est perpendiculaire à la droite CD. Ce résultat s'énonce comme il suit :

Par un point pris sur une droite on peut mener une

perpendiculaire à cette droite et on n'en peut mener qu'une.
Il ne faut du reste pas oublier qu'il ne s'agit dans tout ceci que de figures situées dans le même plan.

21. Corollaire II. — *La somme des angles formés autour d'un point et du même côté d'une droite est égale à 2 droits.*
Si l'on considère, en effet, plusieurs angles ACD, DCE, ECF, FCB, formés autour du point C et d'un même côté par rapport à AB, on a évidemment



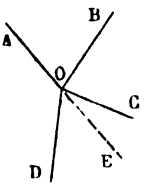
$$ACD + DCE + ECF + FCB = ACD + DCB.$$

Or, ACD et DCB sont supplémentaires (18) ; donc

$$ACD + DCE + ECF + FCB = 2^{dr}.$$

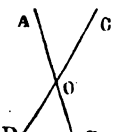
C. Q. F. D.

22. Corollaire III. — *La somme des angles formés autour d'un point et recouvrant tout le plan est égale à 4 droits.*
Considérons en effet plusieurs angles, AOB, BOC, COD, DOA, formés autour du point O et recouvrant tout le plan. Si OE est le prolongement de OA, il est clair que la somme de tous ces angles est égale à la somme des angles formés autour du point O d'un côté de OE, plus la somme des angles formés autour du point O de l'autre côté de OE. Chacune de ces deux sommes étant égale à 2 droits, on a bien



$$AOB + BOC + COD + DOA = 4^{dr}.$$

23. Définition. — On dit que deux angles sont *opposés par le sommet* quand les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre. Les angles AOC et BOD sont opposés par le sommet.

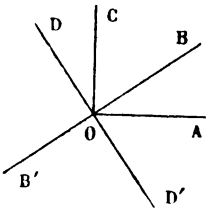


24. Théorème. — *Deux angles opposés par le sommet sont égaux.*
Par exemple, les angles AOC et BOD de la figure ci-contre sont égaux comme ayant même supplément BOC ou AOD.

25. Remarque. — Il suit de là que deux droites indéfinies qui se rencontrent forment quatre angles qui sont deux à deux égaux et deux à deux supplémentaires.

26. Théorème. — *Lorsque deux angles ont leurs côtés perpendiculaires, ils sont égaux s'ils sont tous les deux aigus ou tous les deux obtus, et ils sont supplémentaires si l'un est aigu et l'autre obtus.*

Soient d'abord deux angles aigus AOB et COD tels que les côtés du second soient respectivement perpendiculaires à ceux du premier. Ces deux angles ayant même complément BOC sont égaux.



Soit maintenant les deux angles obtus AOB' et COD'. Ils sont égaux parce que leurs suppléments respectifs AOB et COD sont égaux.

Soit enfin les deux angles AOB et COD', dont le premier est aigu et le second obtus. Ces deux angles sont supplémentaires, car le premier est égal à COD, qui est le supplément du second.

Triangles et Polygones.

27. Définitions. — On appelle *polygone* une ligne brisée fermée. Dans un polygone on distingue les *côtés*, les *sommets*, les *angles* et les *diagonales*. Les *côtés* du polygone sont les portions de lignes droites qui composent la ligne brisée ; les *sommets* sont les points de rencontre des côtés consécutifs ; les *angles* sont ceux qui sont formés par les côtés consécutifs ; enfin, on appelle *diagonales* les droites qui joignent deux sommets quelconques non consécutifs.

On distingue les polygones entre eux d'après le nombre de leurs côtés. Le *triangle*, le *quadrilatère*, le *pentagone*, l'*hexagone*, l'*octogone*, le *décagone*, le *dodécagone* et le *pentédécagone* sont des polygones qui ont respectivement 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 et 15 côtés. On ne donne pas de noms particuliers aux autres polygones ; on dit simplement : un polygone de 7 côtés, un polygone de 11 côtés, etc.

On dit qu'un polygone est *convexe* quand il est tout entier d'un même côté par rapport à la droite indéfinie que l'on obtient en prolongeant l'un quelconque de ses côtés. Le triangle, qui est le plus simple des polygones, est un polygone convexe.

Il y a plusieurs sortes de triangles : le triangle *scalène*, qui a ses trois côtés inégaux ; le triangle *isocèle*, qui a deux côtés

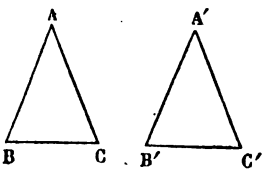
égaux ; le triangle *équilatéral*, qui a ses trois côtés égaux, et le triangle *rectangle*, qui a un angle droit.

On appelle *hypoténuse* d'un triangle rectangle le côté opposé à l'angle droit.

On appelle *base* d'un triangle isocèle le côté qui est différent des deux autres.

28. Théorème. — *Dans un triangle isocèle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Soit un triangle ABC tel que l'on ait AB = AC. Imaginons un triangle A'B'C' identique au triangle ABC, obtenu, par exemple, en décalquant le triangle ABC sur une feuille de papier, et imaginons qu'on le retourne de façon à faire coïncider A'B' avec AC et A'C' avec AB. Alors les trois points A', B', C' étant placés respectivement en A, C, B, l'angle C' coïncide avec l'angle B, tandis que l'angle B' coïncide avec l'angle C. Mais, en prenant l'angle C' par exemple, on voit qu'il est égal à l'angle B, puisqu'il coïncide avec lui ; or, il est égal à l'angle C par construction ; donc on a bien : angle B = angle C. C. Q. F. D.



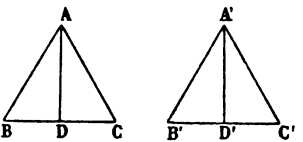
29. Théorème. — *Réciproquement, si, dans un triangle, deux angles sont égaux, les côtés opposés sont égaux.*

Soit ABC (même figure) un triangle dans lequel les angles B et C sont supposés égaux ; il s'agit de prouver que les côtés AB et AC sont aussi égaux.

Pour cela formons, comme plus haut, un triangle A'B'C' identique au triangle ABC, retournons-le et transportons-le ensuite de manière à placer B' en C, C' en B, l'angle B' sur son égal C et l'angle C' sur son égal B ; alors B'A' et C'A' prennent respectivement les directions CA et BA ; par suite, le point A', qui est l'intersection de B'A' et de C'A', coïncide avec l'intersection de CA et de BA, c'est-à-dire avec le point A. Il en résulte que B'A' = CA, puisqu'il coïncide avec lui ; or, B'A' = BA par construction ; donc BA = CA. C. Q. F. D.

30. Corollaire. — *Un triangle équilatéral a ses angles égaux, et réciproquement.*

31. Remarque. — Joignons le sommet A du triangle isocèle ABC au milieu D de la base et reproduisons la figure en A'B'C'D'. Quand on retourne le triangle A'B'C' pour l'appliquer sur le triangle ABC, les deux triangles A'B'D' et A'D'C' viennent s'appliquer respectivement sur ADC et sur ABD. On déduit de là l'égalité des angles BAD, DAC, ainsi que celle des angles BDA, ADC.



La première de ces égalités exprime que AD partage l'angle au sommet en deux parties égales ; la deuxième exprime que AD est perpendiculaire sur BC.

On appelle *bissectrice* d'un angle une droite qui partage cet angle en deux parties égales. On prouve que cette droite existe et qu'il n'y en a qu'une par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait au n° 15.

On appelle *médianes* d'un triangle les droites qui joignent les sommets de ce triangle aux milieux des côtés opposés.

Enfin on appelle *hauteurs* d'un triangle les perpendiculaires menées des sommets aux côtés opposés. L'existence des hauteurs résulte du n° 45.

En vertu de ces définitions, les résultats que nous venons d'obtenir peuvent s'énoncer ainsi :

Dans un triangle isocèle la médiane qui correspond à la base est en même temps bissectrice et hauteur.

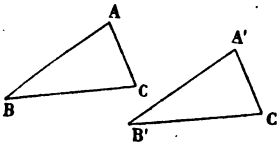
La ligne AD du triangle isocèle ABC possède donc les trois propriétés suivantes : 1° elle est médiane ; 2° elle est bissectrice ; 3° elle est hauteur. Une quelconque de ces propriétés suffisant à la définir, entraîne les deux autres.

32. Cas d'égalité des triangles. — Dans tout triangle on distingue six éléments : trois côtés et trois angles. Quand deux triangles sont égaux, les six éléments de l'un sont respectivement égaux aux six éléments de l'autre. Nous allons prouver que si trois éléments de l'un des triangles, parmi lesquels se trouve un côté, sont égaux aux éléments correspondants de l'autre, les deux triangles sont égaux. On obtient ainsi ce qu'on appelle les *trois cas d'égalité des triangles*.

33. Théorème (Premier cas d'égalité). — *Lorsque deux*

triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, ils sont égaux.

En effet, si ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que BC = B'C', angle B = angle B' et angle C = angle C', en transportant le second triangle sur le premier de manière à faire coïncider les éléments égaux, on constate que les deux triangles coïncident, et par suite qu'ils sont égaux.



34. Remarque. — Il suit de là que les égalités

$$BC = B'C', \qquad B = B', \qquad C = C'$$

entraînent les égalités

$$AB = A'B', \qquad AC = A'C', \qquad A = A'.$$

35. Théorème (Deuxième cas d'égalité). — *Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, il sont égaux.*

On emploie le même mode de démonstration que pour le théorème précédent. Si donc on suppose les triangles ABC, A'B'C' (même figure) tels que

$$A = A', \qquad AB = A'B', \qquad AC = A'C',$$

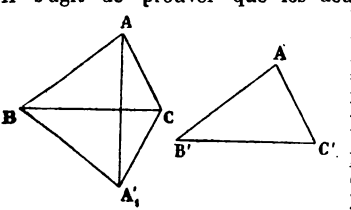
on a $B = B', \qquad C = C', \qquad BC = B'C'.$

36. Théorème (Troisième cas d'égalité). — *Lorsque deux triangles ont les trois côtés égaux, chacun à chacun, ils sont égaux.*

Soient deux triangles ABC, A'B'C' tels que l'on ait

$$AB = A'B', \qquad BC = B'C', \qquad CA = C'A';$$

il s'agit de prouver que les deux triangles sont égaux.



Pour cela, retournons le triangle A'B'C' et transportons-le de manière à lui donner la position BCA$_1$, qui est telle que le point B' coïncide avec le point B et que le point C' coïncide avec le point C. Le triangle ABA$_1$ et le triangle ACA$_1$ sont alors deux triangles isocèles, puisque

l'on a

$$BA = B'A' = BA_1$$
$$CA = C'A' = CA_1.$$

Il en résulte (31) que la bissectrice de l'angle ABA_1 et celle de l'angle ACA_1 passent par le milieu de la base AA_1 et sont perpendiculaires en ce point à cette base. Mais par le milieu de AA_1 on ne peut mener qu'une perpendiculaire à cette droite ; de plus cette perpendiculaire, qui coïncide, d'après ce que nous venons de dire, avec la bissectrice de l'angle ABA_1 et avec la bissectrice de l'angle ACA_1, doit passer par le point B et par le point C ; donc elle coïncide avec la droite BC. Il en résulte que les angles ABC et CBA_1 sont égaux et, par suite, que les deux triangles ABC et CBA_1 sont eux-mêmes égaux (deuxième cas d'égalité). Mais le triangle CBA_1 est égal au triangle A'B'C' par construction ; donc les triangles ABC et A'B'C' sont égaux, ce qui démontre la proposition.

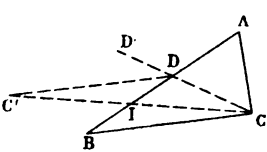
37. Remarque. — Les égalités entre les côtés entraînent les égalités entre les angles, et l'on a

$$A = A', \qquad B = B', \qquad C = C'.$$

38. Théorème. — *Lorsque deux côtés d'un triangle sont inégaux, les angles opposés à ces deux côtés sont inégaux et le plus grand angle est opposé au plus grand côté.*

Supposons que dans un triangle ABC on ait $AB > AC$; il s'agit de prouver que l'on a aussi angle C > angle B.

Pour cela, prenons $AD = AC$; nous formons ainsi un triangle isocèle ADC, dans lequel il y a égalité entre les deux angles ADC et ACD ; de sorte que, si l'on prolonge CD, on a



angle D'DB = angle ADC
= angle ACD.

Joignons le point C au milieu I de DB, et prolongeons cette ligne d'une longueur $IC' = CI$, puis menons C'D. Nous formons ainsi deux triangles IDC', IBC qui sont égaux, en vertu du deuxième cas d'égalité, car angle DIC' = angle BIC (24), $ID = IB$, $IC = IC'$. Il suit de là que

angle IDC' = angle IBC

et, par suite, que l'angle B du triangle ABC n'est qu'une partie de l'angle D'DB, c'est-à-dire une partie de l'angle ACD ;

celui-ci n'étant, à son tour, qu'une partie de l'angle C du triangle ABC, on a bien angle C > angle B (*).

39. Théorème. — *Si deux angles d'un triangle sont inégaux, les côtés opposés sont inégaux et le plus grand côté est opposé au plus grand angle.*

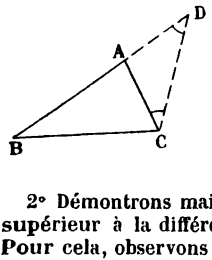
Supposons que dans le triangle ABC (même figure), on ait angle B < angle C.

1° On ne peut avoir AB = AC, car le triangle serait isocèle, et on aurait angle B = angle C, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° On ne peut avoir AB < AC, car en vertu du théorème précédent on aurait angle B > angle C, ce qui est encore contraire à l'hypothèse ; donc on a bien AB > AC, ce qui démontre la proposition.

40. Théorème. — *Un côté quelconque d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.*

1° Démontrons d'abord que le côté BC du triangle ABC est plus petit que AC + AB. Pour cela, prolongeons BA d'une longueur AD = AC, de sorte que AB + AC = AB + AD = BD. Le triangle ADC étant isocèle, on a angle D = angle ACD ; il en résulte que l'angle D n'est qu'une partie de l'angle BCD. Donc, dans le triangle BCD, le côté BD est plus grand que le côté BC (39) et, par suite, on a bien



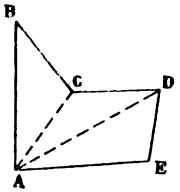
$$BC < AB + AC.$$

2° Démontrons maintenant qu'un côté quelconque BC est supérieur à la différence AB — AC des deux autres côtés. Pour cela, observons que l'on vient de démontrer que l'on a AB < AC + BC ; si l'on retranche alors AC des deux membres de cette inégalité (V. *Algèbre*, 105), il vient

$$AB - AC < BC.$$

41. Théorème. — *Une portion de ligne droite est plus petite que toute ligne brisée terminée aux mêmes extrémités.*

(*) Le fond de cette démonstration est emprunté au *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse.



Il s'agit de prouver que l'on a

$$AE < AB + BC + CD + DE.$$

Pour cela, menons AC et AD ; nous formons ainsi les triangles ABC, ACD, ADE, dans lesquels on a

$$AC < AB + BC,$$
$$AD < AC + CD,$$
$$AE < AD + DE.$$

En ajoutant toutes ces inégalités de même sens on obtient évidemment une nouvelle inégalité de même sens. Si, dans cette nouvelle inégalité,

$$AC + AD + AE < AB + BC + AC + CD + AD + DE,$$

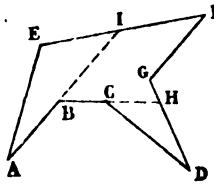
on supprime les parties communes AC et AD, il vient

$$AE < AB + BC + CD + DE.$$

42. Corollaire. — *Une ligne brisée convexe est moindre qu'une ligne brisée enveloppante terminée aux mêmes extrémités.*

Il s'agit de prouver que l'on a

$$AB + BC + CD < AE + EF + FG + GD.$$



Pour cela, prolongeons AB et BC jusqu'aux points I et H, et observons que l'on a (41) :

$$AB + BI < AE + EI,$$
$$BC + CH < BI + IF + FG + GH,$$
$$CD < CH + HD.$$

En ajoutant membre a membre, et en supprimant les parties communes, on obtient bien l'inégalité à établir.

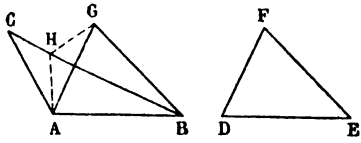
43. Théorème. — *Lorsque deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, comprenant des angles inégaux, les troisièmes côtés sont inégaux et le plus grand de ces côtés est celui qui est opposé au plus grand angle.*

Supposons que les deux triangles ABC, DEF soient tels que l'on ait

$$\text{angle A} > \text{angle D}, \quad AB = DE, \quad AC = DF ;$$

il s'agit de prouver que l'on a $BC > EF$.

Pour cela, transportons le second triangle sur le premier,



de manière à placer D en A, E en B et F en G du même côté que BC par rapport à AB. Puisque l'angle BAC est plus grand que l'angle D, le côté AG du triangle ABG, nouvelle position de DEF, tombe à l'intérieur de l'angle BAC. Soit AH la bissectrice de l'angle CAG. Les deux triangles CAH et AGH sont égaux, parce que le côté AH est commun, que AG = AC (puisque AC = DF = AG) et que les angles CAH et HAG sont égaux en vertu de ce que AH est bissectrice de l'angle CAG. Les deux triangles sont donc égaux en vertu du deuxième cas, et l'on a HG = HC. Or, BG < BH + HG (40); donc, puisque HG = HC,

$$BG < BH + HC,$$

c'est-à-dire

$$BG < BC.$$

Comme BG est égal à EF, le théorème est démontré.

44. Théorème. — *Lorsque deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et les troisièmes côtés inégaux, les angles opposés aux côtés inégaux sont inégaux et le plus grand angle est celui qui est opposé au plus grand côté.*

Supposons que dans les deux triangles ABC, DEF (même figure) on ait

$$AB = DE, \quad AC = DF, \quad BC > EF;$$

il s'agit de prouver que l'on a angle A > angle D.

Pour cela, on observe :

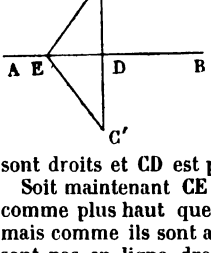
1° Qu'on n'a pas angle A = angle D, car les deux triangles seraient égaux et par suite aussi BC et EF, ce qui est contraire à l'hypothèse;

2° Qu'on n'a pas angle A < angle D, car on aurait (43) BC < EF, ce qui est encore contraire à l'hypothèse; donc on a bien angle A > angle D.

Perpendiculaires et obliques menées d'un point à une droite. — Cas d'égalité des triangles rectangles.

45. Théorème. — *Par un point non situé sur une droite on peut mener une perpendiculaire à cette droite et on n'en peut mener qu'une.*

Soient AB la droite donnée et C le point donné. Imaginons qu'on replie la figure autour de AB de manière à appliquer la partie supérieure sur la partie inférieure, et soit C′ la position du point C quand la figure est ainsi repliée. Nous allons montrer que CC′ est perpendiculaire à AB. En effet, les angles ADC et ADC′ venant coïncider l'un avec l'autre quand la figure est repliée, sont égaux ; or ils sont supplémentaires ; donc ils sont droits et CD est perpendiculaire à AB.



Soit maintenant CE une autre droite quelconque. On voit comme plus haut que les angles CED et C′ED sont égaux ; mais comme ils sont adjacents et que les côtés extérieurs ne sont pas en ligne droite, puisqu'il n'y a qu'une droite CC′ joignant C et C′, ils ne sont pas droits ; donc CE est oblique à AB, et on ne peut mener qu'une perpendiculaire à cette droite par le point C.

46. Théorème. — *Si, d'un point pris hors d'une droite, on mène une perpendiculaire et diverses obliques à cette droite :*

1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;*

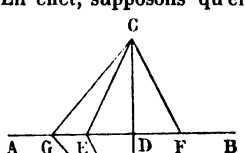
2° *Deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales ;*

3° *Deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire sont inégales, et la plus grande est celle qui s'en écarte le plus.*

1° La perpendiculaire CD est plus courte que l'oblique CE. En effet, supposons qu'en repliant la figure autour de AB, comme dans le numéro précédent, le point C vienne en C′. Alors CD et CE venant coïncider respectivement avec C′D et avec C′E, on voit que $CD + C'D = 2CD$ et que $CE + C'E = 2CE$. Or on a (40)

$$CD + DC' < CE + C'E ;$$

il en résulte $2CD < 2CE$ ou $CD < CE$.



2° Les deux obliques CE et CF qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales. Car, dire que les deux obliques s'écartent également

du pied de la perpendiculaire, c'est dire que DE = DF ; mais alors les deux triangles CDE et CDF sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, savoir :

angle CDE = angle CDF ; DE = DF ;

CD commun ; donc CE = CF.

3° Si DG > DE, l'oblique CG est plus grande que l'oblique CE. En effet, on a (42)

$$CE + C'E < CG + C'G ;$$

mais C'E = CE et C'G = CG ; il en résulte 2CE < 2CG ou CE < CG.

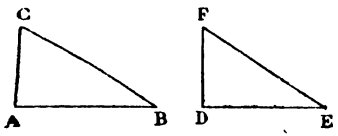
47. Remarque I. — C'est parce que CD est la plus courte des droites qui joignent le point C à un point quelconque de AB qu'on l'appelle la *distance* du point C à la droite AB.

48. Remarque II. — Les réciproques de ces trois propositions sont vraies et se démontrent *par l'absurde*. Pour donner une idée de ce genre de démonstration, proposons-nous, par exemple, de prouver que *si deux obliques sont égales, elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire.* Pour cela, observons que si elles ne s'écartaient pas également du pied de la perpendiculaire, elles seraient inégales en vertu de 3°, ce qui est contraire à l'hypothèse.

49. Cas d'égalité des triangles rectangles. — On peut reconnaître l'égalité de deux triangles rectangles par l'application des règles données pour les triangles quelconques (33, 35 et 36), et que nous avons appelées les cas d'égalité des triangles ; mais il y a, pour les triangles rectangles, deux autres cas d'égalité, tenant à la nature de ces triangles, et ce sont ces deux cas d'égalité que nous allons démontrer.

50. Théorème (Premier cas d'égalité). — *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.*

Soient ABC et DEF deux triangles rectangles tels que les hypoténuses BC et EF soient égales, et tels que angle C = angle F. Transportons le second triangle sur le premier de manière à placer E en B, F en C et FD suivant CA ; alors ED se place suivant la perpendiculaire menée du point B sur AC, c'est-à-dire suivant



BA ; par suite le point D' vient coïncider avec le point A, et les triangles sont égaux.

51. **Théorème** (Deuxième cas d'égalité). — *Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.*

Supposons en effet que, dans les mêmes triangles, on ait maintenant BC = EF, AC = DF, et transportons encore le second triangle sur le premier de manière à faire coïncider DF avec son égal AC et l'angle droit FDE avec son égal CAB; alors le point E vient coïncider avec le point B, car les deux obliques FE et CB étant égales s'écartent également du pied A de la perpendiculaire CA ; donc les deux triangles coïncident et sont égaux.

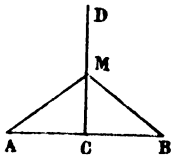
Lieux géométriques.

52. **Définition.** — On appelle *lieu géométrique* ou tout simplement *lieu* correspondant à une propriété donnée, une figure dont tous les points possèdent cette propriété à l'exclusion de tous les autres. D'après cela, pour prouver qu'une figure est le lieu géométrique correspondant à une propriété donnée, il faut prouver :

1° *Que tous les points du lieu sont des points de la figure ;*
2° *Que tous les points de la figure sont des points du lieu.*

53. **Théorème.** — *Le lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés est la perpendiculaire au milieu de la droite qui joint ces deux points.*

1° Soient A et B les deux points donnés et M un point du lieu. Par hypothèse MA étant égale à MB, le triangle MAB est isocèle et la droite qui joint le point M au milieu C de AB est perpendiculaire à AB en ce point ; donc tout point du lieu se trouve sur la droite CD perpendiculaire à AB en son milieu.

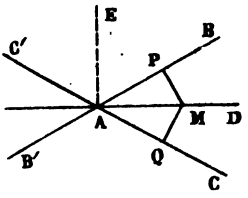


2° Supposons maintenant que M soit un point quelconque de CD. Les deux droites MA et MB s'écartant également du pied de la perpendiculaire sont égales ; par suite le point M est un point du lieu.

Donc tout point du lieu se trouve sur CD et tout point de CD est un point du lieu ; donc la droite indéfinie CD est le lieu demandé.

54. Théorème. — *Le lieu géométrique des points équidistants des deux côtés d'un angle est la bissectrice de cet angle.*

1° Soient BAC l'angle donné, M un point du lieu, MP, MQ les perpendiculaires menées de ce point sur les côtés de l'angle. Si l'on joint le point M au point A, on obtient deux triangles rectangles égaux, parce que l'hypoténuse MA est commune et que MP = MQ par hypothèse ; il en résulte que les angles MAP et MAQ sont égaux et, par conséquent, que tout point du lieu est sur la bissectrice de l'angle.



2° Soient maintenant M un point quelconque de la bissectrice, MP et MQ les perpendiculaires menées de ce point sur les côtés de l'angle. Les deux triangles rectangles MAP et MAQ sont égaux parce qu'ils ont l'hypoténuse commune et les angles aigus MAP, MAQ égaux ; donc MP = MQ et tout point de la bissectrice est un point du lieu, ce qui démontre le théorème.

55. Remarque. — Le lieu des points équidistants des deux côtés de l'angle BAC', supplémentaire de l'angle BAC, est la bissectrice AE de l'angle BAC'. La somme des angles BAC et BAC' étant égale à 2 droits, la somme de leurs moitiés est égale à 1 droit ; ce qui signifie que *les bissectrices de deux angles adjacents et supplémentaires sont perpendiculaires.* Il en résulte que *la bissectrice de l'angle* B'AC' *est le prolongement de* AD et que *la bissectrice de l'angle* B'AC *est le prolongement de* AE.

En rapprochant ces résultats du théorème précédent on peut en conclure que *le lieu des points équidistants de deux droites indéfinies* BB' *et* CC' *est le système des deux bissectrices des quatre angles formés par ces deux droites.*

Droites parallèles.

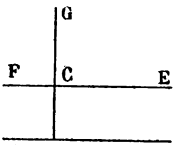
56. Définition. — On dit que deux droites sont *parallèles* quand elles sont situées dans le même plan et qu'elles ne se rencontrent jamais, à quelque distance qu'on les prolonge.

57. Théorème. — *Deux perpendiculaires à la même droite sont parallèles.*

Car si elles se rencontraient, on pourrait, par leur point de rencontre, mener deux perpendiculaires à la même droite, ce qui est impossible (45).

58. Théorème. — *Par un point non situé sur une droite on peut mener une parallèle à cette droite.*

Soit, en effet, C un point non situé sur la droite AB. Par le point C menons CD perpendiculaire à AB et CE perpendiculaire à CD. Les deux droites AB et CE étant perpendiculaires à CD sont parallèles (57); donc on peut mener, par le point C, une parallèle à AB.



59. Postulatum d'Euclide. — On admet que *par un point non situé sur une droite on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite.* C'est en cela que consiste le *postulatum d'Euclide.*

60. Théorème. — *Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

Soient AB, FE (même figure) deux droites parallèles et CD une perpendiculaire à AB. Remarquons d'abord que CD n'est pas parallèle à EF, car si elle lui était parallèle on pourrait, du point D, mener deux parallèles DB et DC à EF. Il en résulte que CD rencontre EF. Supposons alors que C soit le point de rencontre, et que CD ne soit pas perpendiculaire à EF ; on pourra, par le point C, mener la perpendiculaire à CD. Cette perpendiculaire sera parallèle à AB (57). On pourrait donc, du point C, mener deux parallèles à AB, ce qui est impossible ; donc CD est bien perpendiculaire à EF.

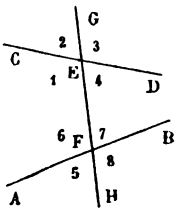
61. Théorème. — *Lorsque deux droites sont parallèles à une troisième, elles sont parallèles entre elles.*

Car si elles se rencontraient, on pourrait, par leur point de rencontre, mener deux parallèles à la troisième droite, ce qui est impossible (59).

62. Définitions. — Etant données deux sécantes AB, CD coupées par une transversale GH, on appelle :

Angles *alternes-internes*, deux angles non adjacents, situés de part et d'autre de la transversale et entre les deux droites;

Angles *alternes-externes*, deux angles non adjacents, situés de part et d'autre de la transversale et non situés entre les deux droites ;



Angles *correspondants*, deux angles situés du même côté de la transversale, l'un entre les deux droites et l'autre extérieur à ces droites ;

Angles *intérieurs*, deux angles situés du même côté de la transversale entre les deux droites ;

Angles *extérieurs*, deux angles situés du même côté de la transversale et à l'extérieur des deux droites.

Les angles 1 et 7 sont alternes-internes, ainsi que les angles 4 et 6 ; les angles 3 et 5 sont alternes-externes ainsi que les angles 2 et 8 ; les angles 3 et 7 sont correspondants ainsi que 4 et 8, 2 et 6, 1 et 5 ; les angles 4 et 7 sont intérieurs, ainsi que 1 et 6 ; enfin, les angles 2 et 5 sont extérieurs, ainsi que 3 et 8.

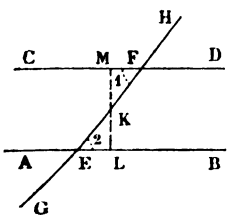
63. Théorème. — *Si deux angles alternes-internes sont égaux, les angles alternes-internes sont égaux deux à deux ainsi que les angles alternes-externes et les angles correspondants ; deux angles intérieurs sont supplémentaires ainsi que deux angles extérieurs.*

Par exemple, si l'on suppose les angles 1 et 7 de la figure précédente égaux, les angles 4 et 6 sont égaux comme ayant des suppléments égaux, de même les angles 3 et 5, etc.

64. Remarque. — Les réciproques de ces propositions sont vraies et se démontrent d'une manière analogue.

65. Théorème. — *Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une transversale, deux angles alternes-internes sont égaux.*

Soient AB, CD deux parallèles coupées par la transversale GH. Pour prouver que les angles 1 et 2 sont égaux, on mène par le milieu K de EF la perpendiculaire ML aux deux parallèles (60). On obtient ainsi deux triangles rectangles KMF, KEL qui sont égaux parce que KF = KE et que les angles FKM, EKL sont égaux. De là résulte évidemment l'égalité des angles 1 et 2.



66. Théorème. — *Si les angles alternes-internes sont égaux, les deux droites* AB *et* CD *sont parallèles.*

Je suppose, en effet, qu'elles ne soient pas parallèles, et, par le point E, je mène la parallèle à CD. Cette parallèle, en vertu du théorème précédent, forme avec AB un angle aigu égal à l'angle 1 et par suite égal à l'angle 2 ; donc elle coïncide avec AB ; donc AB et CD sont parallèles.

67. Remarques. — 1° Les deux théorèmes précédents restent vrais quand, dans l'énoncé, on remplace les angles alternes-internes, soit par les angles alternes-externes, soit par les angles correspondants.

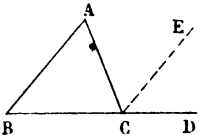
Deux angles intérieurs ou extérieurs sont alors supplémentaires, et réciproquement, si deux angles intérieurs ou extérieurs sont supplémentaires, les deux droites sont parallèles.

2° *Lorsque deux angles ont leurs côtés parallèles deux à deux, ils sont égaux ou supplémentaires.*

Somme des angles d'un triangle ou d'un polygone convexe.

68. Théorème. — *La somme des angles d'un triangle est égale à 2 droits.*

Soit le triangle ABC. Prolongeons BC et menons CE parallèle à AB. Nous formons ainsi, autour du point C, trois angles, ACB, ACE, ECD, dont la somme vaut 2 droits et qui sont respectivement égaux aux angles C, A et B du triangle ABC. C'est évident pour l'angle ACB et, quant aux deux autres, ils sont égaux respectivement aux angles A et B, le premier comme alterne-interne, le deuxième comme correspondant.



Il suit évidemment de là que la somme $A + B + C$ des angles du triangle ABC vaut 2 droits.

69. Corollaires. — 1° *Un triangle ne peut avoir plus d'un angle obtus ;*

2° *Lorsque deux triangles ont deux angles égaux, chacun à chacun, les troisièmes angles sont égaux ;*

3° *Dans un triangle rectangle les angles aigus sont complémentaires ;*

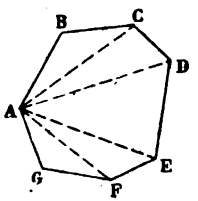
4° *Dans un triangle équilatéral chacun des angles vaut* $\frac{2}{3}$ *de droit.*

70. **Remarque.** — On appelle angle *extérieur* d'un triangle, l'angle formé par un côté et le prolongement d'un autre côté. L'angle ACD de la figure précédente est extérieur au triangle ABC.

Un angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents. En effet, nous avons vu que l'angle ACD est la somme des angles A et B.

71. **Théorème.** — *La somme des angles d'un polygone convexe est égale à autant de fois* 2 *droits qu'il y a de côtés moins* 2.

En effet, si l'on mène toutes les diagonales issues d'un même sommet du polygone, on décompose ce polygone en autant de triangles, moins deux, qu'il a de côtés. La somme des angles du polygone est évidemment égale à la somme des angles de tous ces triangles, et comme la somme des angles de chaque triangle est égale à 2 droits, la somme des angles du polygone est égale à autant de fois 2 droits qu'il y a de triangles, c'est-à-dire à autant de fois 2 droits qu'il y a de côtés moins 2 dans le polygone.



72. **Remarque.** — D'après cela, si n est le nombre des côtés du polygone, la somme des angles est égale à $2(n-2) = (2n-4)$ droits.

73. **Corollaire.** — *La somme des angles extérieurs d'un polygone convexe est égale à* 4 *droits.*

En effet, chaque angle extérieur est le supplément d'un angle intérieur, ce qui veut dire que si l'on ajoute un angle du polygone à l'angle extérieur correspondant, on obtient 2 droits. Le nombre des angles du polygone étant n, s'il y a n côtés, la somme des angles, tant intérieurs qu'extérieurs, sera égale à $2n$ droits. Si, de cette somme, on retranche la somme des angles intérieurs, c'est-à-dire $(2n-4)$ droits, on obtient la somme des angles extérieurs. Cette dernière somme vaut donc $2n-(2n-4) = 4$ droits.

Ajoutons que pour former les angles extérieurs on prolonge tous les côtés dans le même sens.

Parallélogrammes.

74. Définitions. — On appelle *parallélogramme* un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

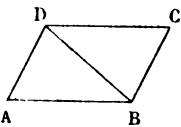
On distingue plusieurs sortes de parallélogrammes :

Le *rectangle* est un parallélogramme dont les angles sont droits ;

Le *carré* est un rectangle dont les côtés sont égaux ;

Le *losange* est un parallélogramme dont les côtés sont égaux. En particulier un carré est un losange, mais un losange n'est pas en général un carré.

75. Théorème. — *Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux.*



Considérons, en effet, un parallélogramme ABCD et menons la diagonale BD ; nous formons ainsi deux triangles ABD, BCD qui ont :

le côté BD commun ;

les angles ADB et DBC égaux comme alternes-internes ;

les angles ABD et BDC égaux pour la même raison.

Ces triangles sont donc égaux (33), et il en est de même des côtés opposés aux angles égaux ; donc AB = DC et AD = BC. C. Q. F. D.

76. Corollaire. — *Des parallèles comprises entre parallèles sont égales.* En particulier, toutes les perpendiculaires à deux droites parallèles sont égales, ce qui s'exprime en disant que *deux droites parallèles sont partout équidistantes.*

77. Théorème (*Réciproque du précédent*). — ***Un quadrilatère dont deux côtés opposés sont égaux et parallèles, ou dont les côtés opposés sont égaux deux à deux, est un parallélogramme.***

Soit un quadrilatère ABCD (même figure).

1° Supposons AD égal et parallèle à BC ; il s'agit de prouver que le quadrilatère est un parallélogramme, c'est-à-dire que AB est parallèle à DC, puisque déjà AD est parallèle à BC.

Pour cela, observons que si l'on mène la diagonale BD, les deux triangles ADB et BDC ont :

le côté BD commun ;

les côtés AD et BC égaux par hypothèse ;

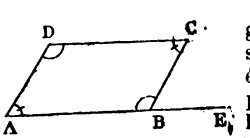
les angles ADB et DBC égaux comme alternes-internes, à cause du parallélisme de AD et de BC.

Il en résulte que les deux triangles sont égaux et, par suite, que angle BDC = angle DBA. Or, ces angles sont alternes-internes par rapport aux deux droites AB et CD coupées par la transversale BD ; comme ils sont égaux, AB et CD sont parallèles (66).

2° Supposons maintenant que AD = BC et que AB = CD. Pour prouver que la figure est un parallélogramme il faut prouver, en vertu de la définition, que AB et CD sont parallèles, ainsi que AD et BC. Mais, pour cela, il suffit de remarquer que les deux triangles ABD, BDC sont égaux comme ayant les trois côtés égaux, chacun à chacun; dès lors, les angles opposés aux côtés égaux étant égaux, on achève la démonstration comme plus haut.

78. Corollaire. — *Un quadrilatère dont les côtés sont égaux est un losange.*

79. Théorème. — *Dans un parallélogramme les angles opposés sont égaux.*

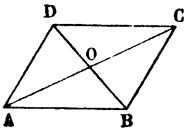


Par exemple, dans le parallélogramme ABCD les angles A et C sont égaux. En effet, le premier est égal à l'angle CBE comme correspondant, le deuxième est égal à l'angle CBE comme alternes-internes.

80. Théorème. — *Réciproquement, si les angles opposés d'un quadrilatère sont égaux, le quadrilatère est un parallélogramme.*

Supposons, en effet, angle A = angle C, angle B = angle D (même figure), et observons que la somme des angles d'un quadrilatère étant égale à 4 droits (71), la moitié de cette somme sera égale à 2 droits. On aura donc A + B = 2 droits ; et comme les angles A et B sont intérieurs, les deux droites AD et BC sont parallèles (67). On voit de même que AB et CD sont parallèles ; donc la figure est bien un parallélogramme.

81. Théorème. — *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux.*



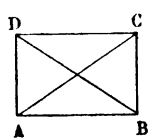
Il s'agit de prouver que le point de rencontre, O, des diagonales AC, BD du parallélogramme ABCD est le milieu de chacune des diagonales. Pour cela, on observe que les deux triangles AOD, BOC ont les angles ADO et OBC égaux comme alternes internes ; les angles DAO et BCO égaux pour la même raison ; et enfin les côtés AD et BC égaux comme côtés opposés d'un parallélogramme. Il en résulte que ces deux triangles sont égaux et que $OA = OC$, $OB = OD$.

82. Théorème. — *Réciproquement, si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leurs milieux, le quadrilatère est un parallélogramme.*

Supposons, en effet, que dans le quadrilatère ABCD (même figure), on ait $AO = OC$ et $BO = OD$. Les deux triangles AOD, BOC sont évidemment égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun ; il en résulte que les angles alternes-internes BCO et OAD sont égaux et, par suite, que BC et AD sont parallèles. On verrait d'une manière analogue que AB et CD sont parallèles ; donc la figure est un parallélogramme, par définition.

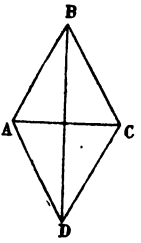
83. Théorème. — *Les diagonales d'un rectangle sont égales, et, réciproquement, si les diagonales d'un parallélogramme sont égales, ce parallélogramme est un rectangle.*

Soient AC et BD les diagonales d'un rectangle ABCD ; il s'agit de prouver qu'elles sont égales. Il suffit d'observer, pour cela, que les deux triangles rectangles ABC, BAD sont égaux comme ayant les côtés de l'angle droit égaux, chacun à chacun ; il en résulte alors $AC = BD$.



Pour la réciproque, on observe que les deux triangles ABD et ABC sont égaux comme ayant les trois côtés égaux, chacun à chacun. On conclut de là l'égalité des angles BAD, ABC, et, comme ces angles sont supplémentaires, puisque le quadrilatère est un parallélogramme par hypothèse, ils sont égaux ; donc ils sont droits et le parallélogramme est un rectangle.

84. Théorème. — *Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires entre elles, et, réciproquement, si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires entre elles, ce parallélogramme est un losange.*



Si on suppose, en effet, que le quadrilatère ABCD soit un losange, le triangle ABD est isocèle. Dès lors AC passant par le milieu de la base BD est perpendiculaire à cette droite.

Pour la réciproque, il suffit d'observer que AB = AD comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire.

85. Corollaire. — *Les diagonales d'un carré sont égales et perpendiculaires entre elles.*

En effet, un carré est à la fois un rectangle et un losange.

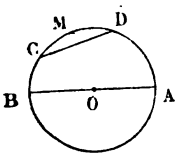
LIVRE II : LE CERCLE

Sécante et tangente.

86. Définitions. — On appelle *circonférence* une ligne plane dont tous les points sont à égale distance d'un point fixe appelé *centre*; on appelle *cercle* la portion du plan limitée par une circonférence.

On appelle *rayon* d'une circonférence toute portion de droite qui va du centre à un point quelconque de la circonférence.

On appelle *diamètre* une droite quelconque passant par le centre et limitée à la circonférence. Tous les rayons sont égaux, par définition, et tout diamètre est le double du rayon. Il suit d'ailleurs de la définition de la circonférence, que la distance d'un point quelconque du plan au centre d'une circonférence tracée dans ce plan est inférieure, égale ou supérieure au rayon suivant que le point est intérieur à la circonférence



sur la circonférence ou extérieur à cette ligne, et réciproquement.

On appelle *arc* une partie de la circonférence, *corde* la droite qui joint les extrémités de l'arc. On dit que la corde *sous-tend* l'arc ou que l'arc est *sous-tendu* par la corde.

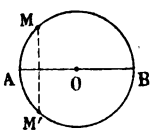
Dans la figure ci-contre, O est le centre, OA et OB sont des rayons, AB est un diamètre, CMD est un arc et CD la corde qui sous-tend cet arc.

Quand on a des arcs d'une même circonférence on peut définir l'égalité ou la somme de deux de ces arcs comme on a défini (2) l'égalité et la somme de deux portions de droite.

87. Théorème. — *Tout diamètre d'une circonférence partage la circonférence et le cercle en deux parties égales.*

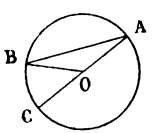
Soient, en effet, M un point situé sur une circonférence de centre O et AB un diamètre de cette circonférence. Imaginons qu'on replie la figure autour de AB de manière à appliquer la partie supérieure du plan sur la partie inférieure.

La distance du point M au point O ne changeant pas pendant le mouvement, le point M prend une position M' telle que la distance du point M' au point O soit égale à la distance du point M au point O, c'est-à-dire au rayon de la circonférence ; donc le point M' est sur la partie inférieure de la circonférence. Tout point de la partie supérieure de la circonférence venant ainsi se placer en un point de la partie inférieure, la première partie vient coïncider avec la deuxième et, par suite, les deux parties sont égales.



88. Théorème. — *Le diamètre est plus grand qu'une corde quelconque qui ne passe pas par le centre.*

Soient, en effet, AC un diamètre et AB une corde quelconque ne passant pas par le centre de la circonférence O. Si l'on joint le point O au point B, on obtient un triangle OAB dans lequel on a



$$AB < OA + OB.$$

Mais on a aussi

$$OA = OB = OC;$$

donc $OA + OB = OA + OC = AC$,

et l'inégalité précédente peut s'écrire

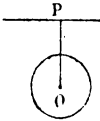
$$AB < AC,$$

ce qui démontre le théorème.

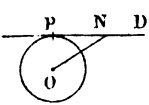
89. Théorème. — *Une circonférence ne peut pas être rencontrée par une droite en plus de deux points.*

Soient O le centre de la circonférence et D la droite. Menons du point O la perpendiculaire OP sur D et distinguons trois cas.

1° OP *est plus grande que le rayon.* — Dans ce cas le point P est extérieur à la circonférence et il en est de même de tous les points de la droite D. Car la perpendiculaire étant plus courte que l'oblique (46), la distance au point O d'un point quelconque de D est plus grande que OP et, à plus forte raison, que le rayon; donc la droite n'a aucun point commun avec la circonférence.



2° OP *est égale au rayon.* — Dans ce cas le point P est sur la circonférence, mais il est le seul point de la droite D jouissant de cette propriété. En effet, la distance de tout point N de D, autre que P, au point O est plus grande que OP; donc tout point N de D, autre que P, est extérieur à la circonférence, et le point P est le seul point de D situé sur la circonférence.



3° OP *est plus petite que le rayon.* — Dans ce cas le point P est intérieur à la circonférence; par suite la droite D rencontre certainement la circonférence en deux points M et M' situés de part et d'autre du point P. Ces points sont les seuls points de rencontre de la droite D et de la circonférence; car si un point N est situé entre P et M ou entre P et M', sa distance au centre est plus petite que le rayon OM (86); s'il n'est pas situé entre P et M ou entre P et M', s'il est par exemple en S, sa distance au centre est plus grande que le rayon OM (86).

En résumé, la droite D rencontre la circonférence en zéro, 1 ou 2 points suivant que OP est supérieure, égale ou

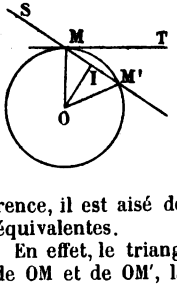
inférieure au rayon. En tout cas il n'y a jamais plus de deux points de rencontre.

Une droite qui rencontre une circonférence en deux points s'appelle une *sécante*.

90. Tangente. — On appelle *tangente* à une circonférence une droite qui n'a qu'un point commun avec cette ligne ; ce point commun s'appelle le point de *contact*, et l'on dit que la droite est tangente à la circonférence en ce point. En vertu du théorème précédent (2°), une droite rencontre une circonférence en un point seulement quand la distance du centre à la droite est égale au rayon de la circonférence. Ceci prouve l'existence des tangentes à une circonférence et montre que pour obtenir la tangente en un point M, il suffit de mener par ce point la perpendiculaire au rayon OM. Ce résultat s'énonce encore comme il suit :

La tangente en un point est perpendiculaire au rayon qui aboutit en ce point.

On appelle encore tangente en un point M d'une circonférence, la limite des positions successives occupées par une sécante MM' qui tourne autour du point M jusqu'à ce que le point M' vienne coïncider avec le point M. L'avantage de cette deuxième définition tient à ce qu'elle convient à la tangente en un point d'une ligne courbe quelconque. Dans le cas de la circonférence, il est aisé de prouver que les deux définitions sont équivalentes.



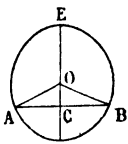
En effet, le triangle OMM' étant isocèle à cause de l'égalité de OM et de OM', la perpendiculaire menée du point O sur MM' passe par le milieu I de MM'. Quand le point M' vient coïncider avec le point M, c'est-à-dire quand la droite devient tangente, OI, qui est restée perpendiculaire à MM', vient coïncider avec OM. Donc *la tangente en* M, *d'après la deuxième définition, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OM, et les deux définitions sont équivalentes.

Dépendance mutuelle des cordes et des arcs

91. Théorème. — *Le diamètre perpendiculaire à*

corde partage la corde et les arcs sous-tendus en deux parties égales.

Soit, en effet, DE le diamètre perpendiculaire à la corde AB, et soit C le point de rencontre de ce diamètre avec AB.



1° Le triangle AOB étant isocèle, le point C est le milieu de AB (31) ; donc AC = CB.

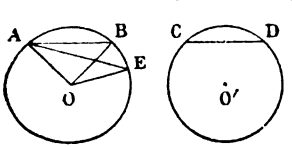
2° Replions la figure autour de DE de manière à appliquer la partie qui est à gauche de DE sur la partie qui est à droite. Le point A venant alors coïncider avec le point B (87), les arcs AD et AE viennent coïncider respectivement avec les arcs BD et BE, donc AD = BD et AE = BE.

92. Remarque. — Le diamètre DE satisfait aux conditions suivantes : il passe par le centre, par le milieu de AB, par les milieux des arcs sous-tendus et il est perpendiculaire à AB. Il suffit de deux de ces conditions pour déterminer le diamètre, de sorte que si deux de ces conditions sont remplies, les autres le sont forcément ; de là plusieurs réciproques du théorème précédent.

93. Théoreme. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° *Des arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales ;*

2° *Si deux arcs sont inégaux, les cordes qui les sous-tendent sont inégales et la plus grande est celle qui sous-tend le plus grand arc.*



1° Soient AB et CD deux arcs égaux appartenant à deux cercles égaux O et O′. Si l'on transporte le cercle O′ sur le cercle O de manière à placer le point O′ en O, les points C et D respectivement en A et B, la corde CD coïncide avec la corde AB ; donc corde AB = corde CD.

2° Soit maintenant AE un arc plus grand que CD. Si l'on prend l'arc AB égal à l'arc CD, le point B tombe entre A et E, puisque l'arc AB, qui est égal à l'arc CD (1°), est inférieur à l'arc AE ; il en résulte que l'angle AOB est inférieur à l'angle AOE. Dès lors dans les deux triangles AOB, AOE on a AE > AB (43).

Nous laissons de côté, ici, les arcs plus grands qu'une demi-circonférence.

94. Remarque. — Les réciproques s'énoncent ainsi :

Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :

1° *Des cordes égales sous-tendent des arcs égaux ;*

2° *Deux cordes inégales sous-tendent deux arcs inégaux et le plus grand est celui qui est sous-tendu par la plus grande corde.*

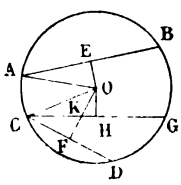
On démontre ces propositions par l'absurde (48).

95. Théorème. — *Dans un même cercle ou dans des cercles egaux :*

1° *Deux cordes égales sont équidistantes du centre ;*

2° *Si deux cordes sont inégales, la plus grande est la plus rapprochée du centre.*

1° Soit corde AB = corde CG. Menons OE, OH respectivement perpendiculaires à ces deux cordes ; il s'agit de prouver que OE = OH. Pour cela, observons que dans les deux triangles rectangles OAE, OCH on a : OC = OA comme rayons ; CH = AE comme moitiés de cordes égales ; donc, les deux triangles rectangles sont égaux (51), et l'on a bien OE = OH.



2° Soit maintenant corde AB > corde CD. En menant OF perpendiculaire à CD, il s'agit de prouver que OE < OF. Pour cela, prenons l'arc CG égal à l'arc AB et menons OH perpendiculaire à CG. On a vu que CG = AB et que OH = OE, de sorte qu'il s'agit de prouver que OH est inférieur à OF. D'autre part, l'arc CG est plus grand que l'arc CD, de sorte que le point O et la corde CD sont de part et d'autre de CG ; il en est par suite de même des points O et F. Dès lors OF rencontre CG en un point K et l'on a OK < OF. Mais on a aussi OH < OK ; donc, *a fortiori*, OH est plus petit que OF.

96. Remarque. — Les réciproques se démontrent par l'absurde et s'énoncent ainsi :

Dans un même cercle ou dans des cercles egaux :

1° *Deux cordes équidistantes du centre sont égales ;*

2° *Deux cordes inégalement éloignées du centre sont iné-*

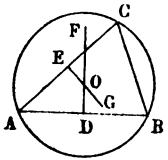
gales, et la plus grande est celle qui est la plus rapprochée du centre.

Positions relatives de deux cercles.

97. Théorème. — *Par trois points non situés en ligne droite on peut faire passer une circonférence et une seule.*

Soient A, B, C les trois points. Observons d'abord que s'il existe des circonférences passant par ces trois points, l'une quelconque de ces circonférences sera déterminée par son centre ; car, si l'on connaît son centre, on connaît aussi son rayon, qui est égal à la distance du centre à l'un quelconque des points A, B ou C. Il suit de là qu'il y aura autant de circonférences passant par A, B et C que l'on pourra trouver de centres.

Or, le centre d'une circonférence passant par les trois points doit être également distant de A et de B ; donc il doit se trouver sur la perpendiculaire au milieu de AB, et l'on voit de même qu'il doit se trouver sur la perpendiculaire au milieu de AC. Ces deux perpendiculaires DF et EG ne sont pas parallèles, car si elles étaient parallèles, AB, qui est perpendiculaire à l'une, serait perpendiculaire à l'autre ; et comme par le point A on ne peut mener qu'une perpendiculaire AC à EG, AC serait le prolongement de AB et les trois points seraient en ligne droite, résultat contraire à l'hypothèse.



Il suit de là que les droites DF, EG se coupent, et se coupent en un point unique, O, qui est le centre cherché. Il y a donc une circonférence et une seule passant par les trois points.

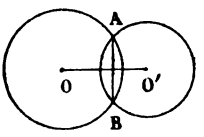
Il n'y a pas lieu de supposer les points en ligne droite, parce qu'une circonférence et une droite ne peuvent avoir plus de deux points communs (89).

98. Corollaire I. — Le point O étant également distant des trois points A, B, C, se trouve sur la perpendiculaire menée au milieu de BC. Il en résulte que *les perpendiculaires menées aux milieux des côtés d'un triangle se coupent au même point.* Ce point s'appelle le centre du cercle *circonscrit* au triangle. Le cercle circonscrit à un triangle ABC est le cercle qui passe par les points A, B, C.

99. **Corollaire II.** — *Si deux circonférences ont plus de deux points communs, elles coïncident.*

100. **Définitions.** — Lorsque deux circonférences ont deux points communs, on dit qu'elles sont *sécantes* ou qu'elles se coupent, et l'on appelle *corde commune* la droite qui joint les deux points d'intersection.

101. **Théorème.** — *Lorsque deux circonférences se coupent, la corde commune est perpendiculaire à la ligne des centres et est partagée par cette ligne en deux parties égales.*



Si, en effet, A et B sont les points communs à deux circonférences O et O', chacun des points O et O' étant également distant de A et de B se trouve sur la perpendiculaire au milieu de AB.

102. **Théorème.** — *Lorsque deux circonférences ont un point commun non situé sur la ligne des centres, elles en ont un second et, par suite, sont sécantes.*

Car si le point A (même figure) est un point commun non situé sur OO', en repliant la figure autour de OO' le point A vient occuper une position B qui doit se trouver à la fois sur la circonférence O et sur la circonférence O'.

103. **Corollaire.** — *Si deux circonférences n'ont qu'un seul point commun, ce point est situé sur la ligne des centres.*

Car s'il n'était pas sur la ligne des centres, elles auraient deux points communs, ce qui est contraire à l'hypothèse.

104. **Circonférences tangentes.** — On dit que deux circonférences sont *tangentes* quand elles n'ont qu'un seul point commun. En ce point commun, appelé *point de contact*, les tangentes aux deux circonférences sont perpendiculaires à la ligne des centres et sont confondues ; de là la dénomination de *circonférences tangentes*.

105. **Définitions.** (Positions relatives de deux circonférences.) — Deux circonférences peuvent occuper l'une par rapport à l'autre cinq positions : elles peuvent être *extérieures* l'une à l'autre, *tangentes extérieurement*, *sécantes*, *tangentes intérieurement* et *intérieures* l'une à l'autre. Ces cinq positions sont appelées les *cinq positions relatives des deux circonférences*. Nous allons indiquer les caractères qui les distinguent les unes des autres.

106. **Théorème.** — 1° *Si deux circonférences sont extérieures l'une à l'autre, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons.*

2° *Si elles sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons.*

3° *Si elles sont sécantes, la distance des centres est plus grande que la différence et plus petite que la somme des rayons.*

4° *Si elles sont tangentes intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons.*

5° *Si elles sont intérieures, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons.*

En effet :

1° Si les circonférences O et O′ (*fig.* 1) sont extérieures l'une à l'autre, on a

$$OO' = OA + AB + BO' > OA + O'B.$$

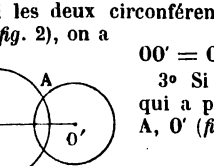


Fig. 1

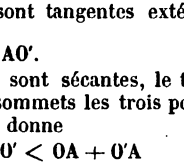


Fig. 2

2° Si les deux circonférences sont tangentes extérieurement (*fig.* 2), on a

$$OO' = OA + AO'.$$

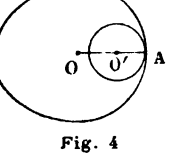


Fig. 3

3° Si elles sont sécantes, le triangle qui a pour sommets les trois points O, A, O′ (*fig.* 3) donne

$$OO' < OA + O'A$$

et

$$OO' > OA - O'A,$$

en supposant $OA > O'A$.

4° Si elles sont tangentes intérieurement (*fig.* 4), on a

$$OO' = OA - O'A.$$

Fig. 4

Fig. 5

5° Enfin, si elles sont intérieures l'une à l'autre (*fig.* 5), on a $OO' = OA - AB - O'B$, par suite

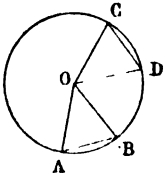
$$OO' < OA - O'B.$$

107. Remarque. — Les réciproques sont vraies et se démontrent par l'absurde ; car les propriétés que nous venons de démontrer s'excluent toutes l'une l'autre. On en déduit, en particulier, que *pour que deux circonférences se coupent, il faut et il suffit que la distance des centres soit inférieure à la somme des rayons et supérieure à leur différence.*

Mesure des angles.

108. Angles au centre et angles inscrits. — On appelle *angle au centre* un angle qui a son sommet au centre de la circonférence ; on appelle *angle inscrit* un angle qui a son sommet sur la circonférence.

109. Théorème. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux des angles au centre égaux interceptent des arcs égaux.*



Il revient au même de faire la démonstration pour un cercle ou pour deux cercles égaux. Soient donc AOB, COD deux angles au centre égaux dans le cercle O. Les triangles isocèles AOB, COD sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun ; donc corde AB = corde CD, et par suite (94) arc AB = arc CD.

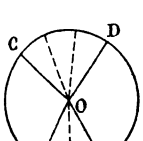
110. Théorème. — *Réciproquement, dans un même cercle ou dans des cercles égaux, deux arcs égaux sont interceptés par des angles au centre qui sont égaux.*

Car si les arcs AB et CD (même figure) sont égaux, il en est de même des cordes AB et CD, ainsi que des triangles AOB, COD. De là résulte évidemment l'égalité des angles AOB, COD.

111. Remarque. — Il est clair que si les arcs sont inégaux les angles au centre correspondants sont inégaux, qu'au plus grand arc correspond le plus grand angle, et réciproquement.

112. Théorème. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, le rapport de deux angles au centre est égal au rapport des arcs interceptés.*

Faisons encore la démonstration pour deux angles au centre AOB, COD appartenant au même cercle.



Supposons qu'il existe un angle qui soit contenu, par exemple, 2 fois dans AOB et 3 fois dans COD, de sorte que l'on a (V. *Arithm.*, 163)

$$\frac{\text{AOB}}{\text{COD}} = \frac{2}{3};$$

il s'agit de prouver que l'on a aussi

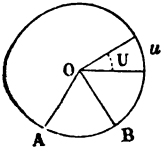
$$\frac{\text{arc AB}}{\text{arc CD}} = \frac{2}{3}.$$

Pour cela, divisons l'angle AOB en deux parties égales et l'angle COD en trois parties égales : chacune des parties de AOB sera, par suite de l'hypothèse faite plus haut, égale à l'une quelconque des parties de COD.

Mais en vertu du théorème précédent l'arc AB sera partagé en deux parties égales par les côtés des angles partiels en lesquels on a partagé l'angle AOB ; de même l'arc CD sera partagé en trois parties égales. Il en résulte qu'un même arc, la moitié de l'arc AB, est contenu 2 fois dans AB, 3 fois dans CD, et par suite que $\frac{\text{arc AB}}{\text{arc CD}} = \frac{2}{3}$.

113. Théorème. — *Si l'on prend pour unité d'angle l'angle au centre qui intercepte sur la circonférence un arc égal à l'unité d'arc, un angle au centre a la même mesure que l'arc compris entre ses côtés.*

Ce théorème signifie que, dans les conditions indiquées, le nombre qui mesure l'angle au centre considéré est égal au nombre qui mesure l'arc compris entre ses côtés.



Pour le démontrer, considérons un angle au centre AOB, et soit U l'angle au centre que l'on prend pour unité et qui intercepte un arc *u* égal à l'unité d'arc. On a (112)

$$\frac{\text{angle AOB}}{\text{angle U}} = \frac{\text{arc AB}}{\text{arc } u}.$$

Mais, puisque U et *u* sont respectivement l'angle et l'arc unité, le premier rapport représente (V. *Arithm.*, 162) le

nombre qui mesure l'angle et le second le nombre qui mesure l'arc. Comme ces deux nombres sont égaux, le théorème est démontré.

114. Mesure des angles. — D'après cela, pour mesurer un angle on décrit de son sommet comme centre une circonférence de rayon arbitraire, et on prend pour unité d'angle l'angle au centre qui intercepte sur cette circonférence un arc égal à l'arc unité d'arc. Avec cette unité d'arc, on mesure l'arc compris entre les côtés de l'angle à mesurer, et le nombre trouvé est la mesure de cet angle avec les unités adoptées.

Il est clair que, pourvu que l'on respecte la correspondance entre les deux unités, on peut choisir arbitrairement l'une d'elles.

Supposons alors que l'on prenne pour unité d'angle l'angle droit, l'unité d'arc sera le quart de la circonférence ou le *quadrant*.

Supposons maintenant que l'on prenne, comme c'est le cas le plus fréquent, pour unité d'arc la 360e partie de la circonférence : cette unité s'appelle alors le *degré*. On divise le degré en 60 minutes et la minute en 60 secondes.

Dans ce système d'unités un angle droit vaut 90 degrés, et l'on écrit 90° ; l'un quelconque des angles d'un triangle équilatéral vaut $\frac{2}{3}$ de 90 ou 60°.

115. Théorème. — *Un angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

La démonstration comprend trois cas :

1° *L'un des côtés de l'angle passe par le centre.* — Soit BAC (*fig.* 1) cet angle. Si l'on mène le rayon OC, on obtient un angle au centre BOC extérieur au triangle isocèle AOC ; cet angle au centre est donc égal à la somme des angles OCA et OAC ou au double de l'angle OAC, puisque $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$. Il en résulte que le double de l'angle BAC a la même mesure que l'arc BC ; donc l'angle BAC a la même mesure que l'arc $\frac{BC}{2}$. Pour abréger, on dit qu'*il a pour mesure la moitié de l'arc* BC.

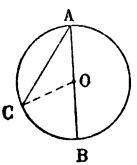


Fig. 1

2° *Le centre est à l'intérieur de l'angle.* — Soit BAC (*fig.* 2) cet angle. S'il on mène le diamètre AOD, on voit que $\overset{\frown}{BAC} = \overset{\frown}{BAD} + \overset{\frown}{DAC}$. Mais chacun des angles BAD, DAC a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés ; donc la mesure de l'angle BAC est égale à $\frac{BD}{2} + \frac{DC}{2}$, c'est-à-dire à $\frac{BC}{2}$.

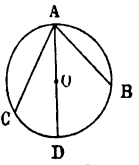


Fig. 2

3° *Le centre est à l'extérieur de l'angle.* — En menant encore le diamètre AOD (*fig.* 3), on voit que l'angle inscrit BAC est la différence des deux angles DAC et DAB. On en conclut que sa mesure est égale à

$$\frac{DC}{2} - \frac{DB}{2} \quad \text{ou à} \quad \frac{DC - DB}{2} = \frac{BC}{2}.$$

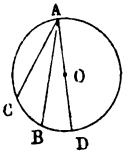
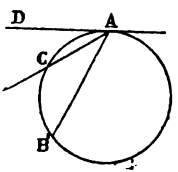


Fig. 3

116. Corollaire. — *Un angle inscrit dans une demi-circonférence est droit.*

Car il a pour mesure la moitié d'une demi-circonférence, c'est-à-dire un quadrant.

117. Remarque. — Le théorème précédent (115) reste vrai lorsque le côté AC tourne autour du point A, jusqu'à ce que le point C vienne coïncider avec le point A, c'est-à-dire jusqu'à ce que AC vienne coïncider avec la tangente AD au point A. Il en résulte que l'*angle* BAD *formé par une tangente et par une corde a pour mesure la moitié de l'arc* BCA *compris entre ses côtés.*



118. Théorème. — 1° *Si un angle a son sommet à l'intérieur de la circonférence, il a pour mesure la demi-somme des arcs compris entre ses côtés et leurs prolongements.*

2° *Si un angle a son sommet à l'extérieur de la circonférence, il a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés.*

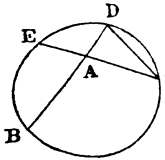


Fig. 1

1° L'angle BAC (*fig.* 1) qui a son sommet à l'intérieur de la circonférence, a pour

mesure la demi-somme des arcs BC et DE. En effet, il est égal à la somme des angles inscrits BDC, ECD, qui ont respectivement pour mesure $\frac{BC}{2}$ et $\frac{DE}{2}$.

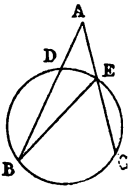


Fig 2

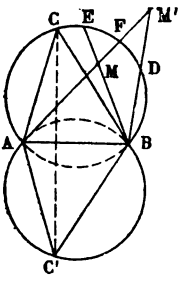
2° L'angle BAC (*fig.* 2) qui a son sommet à l'extérieur de la circonférence, a pour mesure la demi-différence des arcs BC et DE. En effet, il est égal à la différence des angles BEC, DBE, qui ont respectivement pour mesure $\frac{BC}{2}$ et $\frac{DE}{2}$.

119. Définitions. — On appelle *segment* de cercle la partie d'un cercle comprise entre un arc et la corde qui le sous-tend. Si AB est la corde d'un segment, on appelle angle inscrit dans ce segment tout angle AMB dont les côtés passent respectivement par A et par B, et dont le sommet M est sur l'arc du segment.

Tous les angles inscrits dans le même segment sont évidemment égaux, parce qu'ils ont des mesures égales (115).

120. Théorème. — *Le lieu des sommets des angles de grandeur constante dont les côtés passent par deux points fixes* A *et* B, *est un système de deux arcs de cercle égaux, situés de part et d'autre de* AB.

Soit, en effet, ACB un angle égal à l'angle donné. Si l'on trace la circonférence circonscrite au triangle ABC, tous les points de l'arc ACB sont des points du lieu (115). De plus, si l'on considère tous les points du plan situés du même côté de AB que le point C, les seuls qui appartiennent au lieu sont les points de l'arc ACB. En effet, si un point M est intérieur au segment ACB, l'angle AMB est plus grand que l'angle ACB (118, 1°). De même si un point M' est extérieur au même segment, l'an AM'B est plus petit que l'angle A (118, 2°). Par suite aucun point tel q M ou tel que M' n'appartient au li Il en résulte que l'arc ACB est la pa du lieu qui est située du même côté de AB que le point

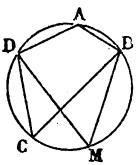


Mais il est clair que si l'on replie la figure autour de AB l'arc AC'B ainsi obtenu sera la partie du lieu située du côté opposé à C par rapport à AB. Donc le lieu se compose des deux arcs égaux ACB et AC'B.

Les deux segments ACB et AC'B s'appellent des *segments capables* de l'angle ACB *décrits sur* AB *comme corde*.

121. Théorème. — *Lorsqu'un quadrilatère convexe est inscrit dans un cercle, les angles opposés sont supplémentaires. Réciproquement, si les angles opposés d'un quadrilatère convexe sont supplémentaires, le quadrilatère peut être inscrit dans un cercle.*

1° Si ABCD est un quadrilatère convexe inscrit, l'angle A a pour mesure la moitié de l'arc BCD et l'angle C a pour mesure la moitié de l'arc BAD. Donc la somme des angles A et C a pour mesure $\frac{BCD + BAD}{2}$, c'est-à-dire une demi-circonférence ; donc A et C sont supplémentaires.

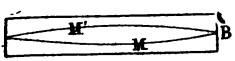


2° Réciproquement, supposons (même figure) que les angles A et C soient supplémentaires, et faisons passer une circonférence par les points A, B, D. Cette circonférence est partagée par les points B et D en deux arcs dont l'un ne renferme pas le point A. Si M est un point de cet arc, l'angle BMD étant supplémentaire de l'angle A (1°), est égal à l'angle C. Mais alors le point C se trouve sur l'arc BMD (120), ce qui démontre le théorème.

Problèmes élémentaires sur la droite et le cercle.

122. Instruments servant à effectuer les constructions. — On effectue les constructions géométriques au moyen de la *règle*, du *compas*, de l'*équerre* et du *rapporteur*.

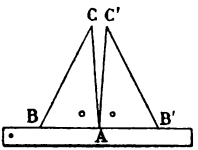
La *règle* sert à tracer des lignes droites. Il importe donc de la vérifier. Pour cela, on la place sur une feuille de papier, puis on trace une ligne AMB au moyen d'un crayon que l'on maintient appliqué contre le bord de la règle. On retourne ensuite la règle autour de



AB et l'on trace de même une autre ligne AM'B. Si la règle est bien droite, les deux lignes ainsi obtenues le sont également et, comme elles ont deux points communs, elles coïncident. Si elles ne coïncident pas, c'est que la règle n'est pas droite.

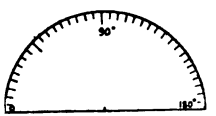
Le *compas*, que tout le monde connaît, sert à tracer des circonférences.

L'*équerre*, qui a la forme d'un triangle rectangle, sert à tracer des droites parallèles. Avant de l'employer à cet usage, il est bon de vérifier que l'angle est bien droit. Pour cela, on appuie un côté AB de l'angle à vérifier le long d'une règle vérifiée. Soit AC la position de l'autre côté de cet angle. On retourne ensuite l'équerre de manière à l'amener dans la position AB'C'. Si l'on a tracé AC et si l'on trace maintenant AC', pour que l'équerre soit exacte il faut que AC' coïncide avec AC, et cela est suffisant.



Pour tracer des droites parallèles au moyen de l'équerre on maintient l'un des côtés appliqué le long d'une règle tout en le faisant glisser et on trace, chaque fois, un trait au moyen d'un crayon appuyé le long de l'autre côté.

Le *rapporteur* est un instrument qui sert à mesurer les angles. Il se compose d'un demi-cercle divisé en degrés et demi-degrés. Le centre est marqué sur le diamètre qui le termine. Pour mesurer un angle, on place le sommet du rapporteur au centre de l'angle, et la ligne qui va du centre au zéro suivant l'un des côtés de l'angle. Il suffit alors de lire le numéro du rapporteur qui correspond à l'autre côté de l'angle.



On peut également se servir du rapporteur pour tracer un angle de grandeur donnée.

123. Résolution des problèmes. — Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre les problèmes de géométrie. Dans certains cas la solution résulte immédiatement de théorèmes du cours. Dans d'autres cas elle est d'une nature

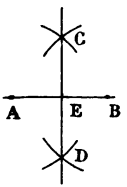
un peu plus cachée et il y a lieu d'essayer l'une des deux méthodes suivantes :

1° On suppose le problème résolu et l'on cherche à découvrir les relations qui peuvent exister entre les lignes connues et les lignes inconnues. De ces relations, si on parvient à les découvrir, résulte souvent la solution du problème. Cette méthode porte le nom de *méthode analytique.*

2° Il peut arriver que la solution d'un problème dépende de la détermination d'un point assujetti à des conditions connues. On fait alors abstraction de toutes les conditions sauf une, de sorte que le point n'est plus déterminé mais décrit un lieu géométrique, plus ou moins facile à trouver suivant le choix de la condition qui a été laissée de côté. En laissant de côté une autre condition, on obtient un autre lieu géométrique, dont l'intersection avec le premier définit le point cherché. Cette méthode porte le nom de *méthode des lieux geométriques.* L'emploi simultané des deux méthodes conduit souvent à de bons résultats.

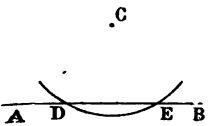
Nous allons traiter quelques exemples.

124. Problème I. — *Mener la perpendiculaire au milieu d'une droite donnée.*



Si AB est la droite donnée, la solution du problème résulte immédiatement de ce que tous les points de la perpendiculaire sont équidistants de A et de B. Des points A et B comme centres, avec une ouverture de compas arbitraire mais plus grande que la moitié de AB, on décrit donc des arcs de cercle qui se coupent en deux points C et D : la droite CD est la perpendiculaire cherchée.

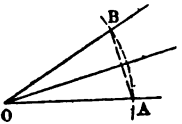
125. Problème II. — *Mener d'un point la perpendiculaire à une droite.*



Comme on va le voir, la solution résulte des propriétés des arcs et des cordes (91). Du point donné C, on décrit un arc de cercle qui rencontre la droite donnée AB, en deux points D et E, puis on mène la perpendiculaire au milieu de DE : on a ainsi la droite cherchée.

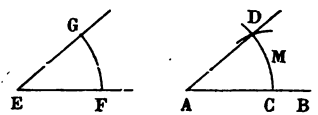
126. Problème III. — *Diviser un angle en deux parties égales.*

On peut considérer la solution de ce problème comme une application des propriétés du triangle isocèle. Si AOB est l'angle donné, on décrit du point O comme centre un arc de cercle AB de rayon quelconque. Le triangle AOB étant alors isocèle, la perpendiculaire au milieu de AB passe par le point O et divise l'angle AOB en deux parties égales, ce qui ramène le problème au problème I.



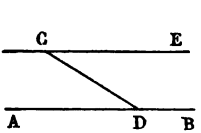
127. Problème IV. — *Construire un angle égal à un angle donné.*

On applique ici une propriété des angles au centre (109). Si E est l'angle donné, on décrit un arc de cercle FG ayant pour centre le point E; puis, d'un point A comme centre, on décrit un arc de cercle CMD de même rayon. Du point C comme centre, avec une ouverture de compas égale à la corde FG, on décrit un second arc de cercle coupant le premier au point D ; enfin, on mène les droites AC, AD et l'on a en DAC un angle égal à l'angle E, puisque les arcs FG et CD sont égaux comme sous-tendus par des cordes égales.



128. Problème V. — *Par un point pris hors d'une droite mener la parallèle à cette droite.*

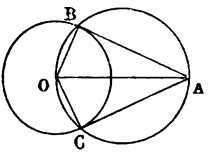
Nous appliquerons ici la propriété des angles alternes-internes démontrée au n° 65. Soient AB et C la droite et le point donnés. Joignons le point C à un point quelconque D de AB, puis faisons l'angle DCE égal à l'angle CDA (127). La droite CE sera alors parallèle à la droite AB.



129. Problème VI. — *Mener une tangente à une circonférence par un point donné non situé sur cette ligne.*

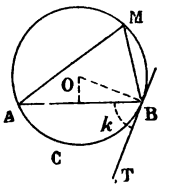
Soient A et O le point et le centre de la circonférence

donnés. Appliquons simultanément la méthode analytique et la méthode des lieux géométriques. Supposons donc le problème résolu et soit AB l'une des tangentes demandées, B désignant le point de contact. Tout revient évidemment à déterminer le point B. Or, l'angle ABO étant droit, on voit que le point B sera à l'intersection de la circonférence O et de la circonférence décrite sur AB comme diamètre. Quand le point A est extérieur à la circonférence O, il y a deux points de rencontre B et C, et par suite deux tangentes AB et AC.



130. **Problème VII.** — *Sur une droite donnée*, AB, *décrire un segment capable d'un angle donné k.*

Nous emploierons encore simultanément les deux méthodes. Supposons donc le problème résolu, et soit AMB l'un des segments cherchés, de centre O. Il est clair que tout revient à déterminer le point O. Or, on a un premier lieu géométrique du point O en assujettissant simplement le segment à passer par les deux points A et B; car le lieu du point O est alors la perpendiculaire menée au milieu de AB. Pour avoir un second lieu géométrique, menons en B la tangente BT au cercle O. L'angle ABT (c'est ici qu'intervient la méthode analytique) est alors égal à l'angle AMB inscrit dans le segment, c'est-à-dire à l'angle k; de sorte que BT est une droite connue. Dès lors en menant en B la perpendiculaire BO à BT, cette perpendiculaire passe par O, en vertu de la propriété de la tangente, et fournit un second lieu géométrique du point O.



Comme on peut construire l'angle ABT au-dessous ou au-dessus de AB, on obtient ainsi les deux segments égaux qui répondent à la question.

LIVRE III : LES FIGURES SEMBLABLES

Lignes proportionnelles.

131. Théorème fondamental. — *Sur la droite indéfinie qui joint deux points* A *et* B, *il existe toujours deux points, l'un compris entre* A *et* B, *l'autre en dehors de* AB, *tels que le rapport des distances de chacun d'eux aux points* A *et* B *ait une valeur donnée.*

Supposons en effet qu'un point M se déplace sur la droite indéfinie AB dans un sens quelconque. Cela posé :

1° Considérons d'abord le point M quand il est à gauche de A. On a alors

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MB - AB}{MB} = 1 - \frac{AB}{MB}.$$

Le rapport étant égal à l'unité diminuée de la fraction $\frac{AB}{MB}$ qui est inférieure à l'unité, est lui-même inférieur à 1. D'ailleurs si le point M est en A, on a $\frac{AB}{MB} = \frac{AB}{AB} = 1$; quand le point M s'éloigne vers la gauche et s'éloigne indéfiniment, $\frac{AB}{MB}$ diminue et tend vers zéro, parce que le numérateur reste fixe et que le dénominateur croît sans cesse ; donc, quand M s'éloigne indéfiniment à gauche de A, le rapport $\frac{MA}{MB}$ croît de 0 à 1, en passant une fois et une seule par toutes les valeurs comprises entre ces deux nombres.

M A B

2° Considérons maintenant le point M quand il est entre A et B, ou plutôt, supposons qu'il se déplace de A vers B. Le rapport $\frac{MA}{MB}$ d'abord nul, quand M est en A, va en croissant parce que le numérateur croît et que le dénominateur décroît. Ce rapport croît d'ailleurs indéfiniment à mesure que M s'approche de B, parce que MB tend vers zéro, et il passe une fois et une seule par toutes les valeurs com-

A M B

prises entre 0 et ∞. Quand M est au milieu de AB, le rapport est égal à 1.

3° Supposons enfin que le point M s'éloigne indéfiniment à droite du point B. Le rapport $\frac{MA}{MB}$ est évidemment supérieur à 1, parce que le dénominateur est inférieur au numérateur.

En outre, si l'on observe que $\frac{MA}{MB} = \frac{MB + AB}{MB} = 1 + \frac{AB}{MB}$, en raisonnant comme dans 1° pour le rapport $\frac{AB}{MB}$, on voit que si M s'éloigne indéfiniment à droite de B, le rapport $\frac{MA}{MB}$ décroît sans cesse jusqu'à 1 et prend une fois et une seule toutes les valeurs supérieures à 1.

En résumé, si la valeur donnée est inférieure à 1, il y a deux points M tels que $\frac{MA}{MB}$ ait cette valeur. Ils sont tous deux à gauche du milieu de AB, l'un entre ce milieu et le point A, l'autre à gauche de A. Si la valeur donnée est supérieure à 1, il y a encore deux points répondant à la question. Ils sont tous deux à droite du milieu de AB, l'un entre ce milieu et le point B, l'autre à droite de B. En tous cas il y a deux points et deux seulement.

132. Théorème. — *Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle partage les deux autres côtés en segments proportionnels.*

Soit, en effet, DE une parallèle au côté BC d'un triangle ABC; il s'agit de prouver que l'on a

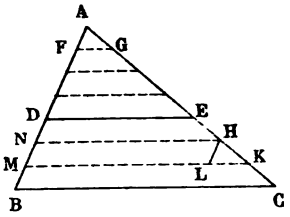
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Pour cela, supposons qu'il existe une longueur qui soit contenue exactement 3 fois dans DB et 4 fois dans AD, de sorte que l'on a (V. *Arithm.* 163)

$$\frac{AD}{DB} = \frac{4}{3}.$$

Il suffit alors de prouver que $\frac{AE}{EC} = \frac{4}{3}$. A cet effet, par-

tageons AD en 4 parties égales, DB en 3, et, par les points de division, menons des parallèles à BC. Ces parallèles déterminent sur AC des segments égaux. En effet, prouvons par exemple que HK = AG. Pour cela, menons HL parallèle à AB et observons que les parties de AD étant égales aux parties de DB, par hypothèse, on a MN = FA ; or, HL = MN ; donc HL = FA. De plus, les deux triangles AFG, HLK ont évidemment les angles adjacents aux bases HL et AF égaux soit comme ayant les côtés parallèles, soit comme correspondants. Donc ces deux triangles sont égaux (premier cas), et l'on a AG = HK.



Les segments déterminés sur AC étant égaux, comme AE comprend 4 de ces segments et que EC en comprend 3, on a bien $\frac{AE}{EC} = \frac{4}{3}$, et par suite

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

133. **Remarque.** — On a vu en arithmétique (156) que l'on peut donner diverses formes à une proportion. En particulier, la proportion $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ peut aussi s'écrire :

$$\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC};$$

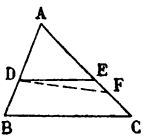
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC};$$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}.$$

134. **Théorème.** — *Réciproquement, si une droite partage deux côtés d'un triangle en segments proportionnels, elle est parallèle au troisième côté.*

Supposons, en effet, que l'on ait $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, et que de

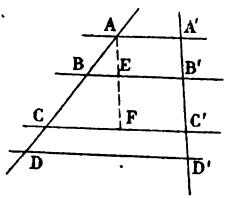
plus le point E soit situé par rapport à A et à C comme D est situé par rapport à A et à B. Si DE n'était pas parallèle à BC, on pourrait mener par D la parallèle DF à BC, et l'on aurait, en vertu de la proposition directe, $\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}$; de plus F serait situé par rapport à A et à C comme D est situé par rapport à A et à B. On conclurait de là l'égalité $\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FC}$, qui ne peut avoir lieu que si F coïncide avec E, en vertu du théorème fondamental, et parce que E et F sont situés de même par rapport à A et à C. Donc DF coïncide avec DE; donc DE est parallèle à BC.



135. Corollaire. — *Des droites parallèles déterminent sur deux droites quelconques des segments proportionnels.*

Par exemple, dans la figure ci-contre, il s'agit de prouver que l'on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$



Pour établir la première de ces égalités, menons AEF parallèle à A'B'. On a alors (132)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF}.$$

Or on a évidemment $AE = A'B'$, $EF = B'C'$, comme côtés opposés de parallélogrammes ; donc on a bien

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

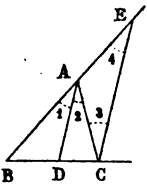
On prouverait d'une manière analogue que $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$.

136. Théorème. (Propriété des bissectrices d'un triangle). — *Les bissectrices d'un angle d'un triangle partagent le côté opposé à cet angle en segments proportionnels aux côtés adjacents.*

Soit le triangle ABC. Si l'on mène la bissectrice AD de

l'angle intérieur BAC, il s'agit de prouver que l'on a

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$



Pour cela, on mène par le point C la parallèle CE à AD, et l'on a (132)

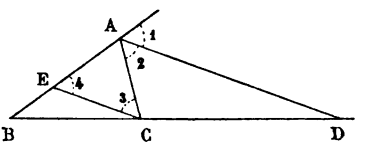
$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC}.$$

Mais les angles 1 et 4 sont égaux comme correspondants ; 2 et 3 sont égaux comme alternes-internes ; et comme les angles 1 et 2 sont égaux par construction, les angles 3 et 4 sont aussi égaux. Il suit de là que le triangle AEC est isocele et que AE = AC. Si donc on remplace AEpar son égal AC, on obtient l'égalité à démontrer,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

Si, au lieu de considérer la bissectrice intérieure, on avait considéré la bissectrice extérieure AD, on aurait eu encore

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$



La démonstration est absolument la même dans les deux cas. La seule différence consiste en ce que dans le premier cas, le point D est entre B et C, tandis qu'il est sur le prolongement de BC dans le second.

137. **Remarque.** — La réciproque est vraie et résulte de ce que, entre B et C, il n'existe qu'un point D tel que $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, et de ce que, pareillement, sur le prolongement de BC, il n'existe qu'un point D tel que $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (131).

Similitude.

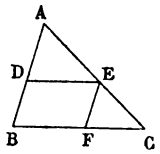
138. **Définitions.** — On dit que deux polygones sont *semblables* lorsqu'ils ont les angles égaux, chacun à chacun, et les côtés *homologues* proportionnels. On appelle côtés *homologues* ceux qui sont adjacents aux angles égaux.

Il n'est pas évident *a priori* qu'il existe des polygones

semblables. Le théorème suivant prouve qu'il existe des triangles semblables.

139. **Théorème.** — *Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine un nouveau triangle semblable au premier.*

Soit un triangle ABC dans lequel on a mené la parallèle DE au côté BC ; il s'agit de prouver que les deux triangles ABC, ADE sont semblables.



1° Ils ont évidemment leurs angles égaux, chacun à chacun ; car l'angle A est commun ; B et D sont égaux comme correspondants, et enfin E et C sont égaux pour la même raison.

2° Il reste à prouver que les côtés homologues sont proportionnels. Or on a d'abord (133)

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

D'autre part, si l'on mène EF parallèle à AB, on a aussi (133)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC},$$

ou

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC},$$

puisque $BF = DE$ comme côtés opposés d'un parallélogramme.

La comparaison de cette suite d'égalités donne immédiatement

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ajoutons que la démonstration reste la même quelle que soit la position de DE par rapport au sommet A et au côté BC.

140. Cas de similitude de deux triangles. — La similitude de deux triangles entraîne 5 égalités entre les éléments de ces triangles : 2 pour la proportionnalité des côtés et 3 pour l'égalité des angles. Nous allons prouver que deux de ces égalités convenablement choisies entraînent les trois autres. Nous obtiendrons ainsi des propositions qu'on appelle les *cas de similitude* de deux triangles et qui cor-

respondent aux cas d'égalité démontrés dans le premier livre.

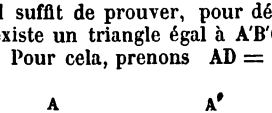
141. Théorème (Premier cas de similitude). — *Deux triangles qui ont deux angles égaux, chacun à chacun, sont semblables.*

Soient ABC, A'B'C' deux triangles tels que l'on ait

$$A = A', \qquad B = B';$$

il suffit de prouver, pour démontrer leur similitude, qu'il existe un triangle égal à A'B'C' et semblable à ABC.

Pour cela, prenons $AD = A'B'$ et menons DE parallèle à BC. Nous obtenons ainsi un triangle ADE semblable au triangle ABC (139) ; de sorte qu'il suffit de prouver qu'il est égal à A'B'C'. Or, ceci résulte de ce que $AD = A'B'$ et de ce que les angles adjacents à ces côtés sont égaux chacun à chacun, en vertu des hypothèses ; car $A = A'$ et $D = B = B'$.



Comme on le voit, ce premier cas de similitude correspond au premier cas d'égalité.

142. Théorème (Deuxième cas de similitude). — *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels sont semblables.*

Soient ABC, A'B'C' (même figure) deux triangles tels que l'on ait

$$A = A', \qquad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Pour prouver qu'ils sont semblables, il suffit, comme plus haut, de prouver qu'il existe un triangle égal à A'B'C' et semblable à ABC. Pour cela, prenons $AD = A'B'$ et $AE = A'C'$, de sorte qu'en vertu de l'une des hypothèses on a

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

et, par suite, DE est parallèle à BC (134). Mais alors le triangle ADE est semblable au triangle ABC (139) et, comme il est évidemment égal à A'B'C' (*2e cas d'égalité*), ABC et A'B'C' sont semblables.

Il est clair que le 2e cas de similitude correspond, d'après cela, au 2e cas d'égalité.

143. **Théorème** (Troisième cas de similitude). — *Deux triangles qui ont leurs côtés proportionnels sont semblables.*

Soient ABC, A'B'C' (même figure) deux triangles tels que l'on ait

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Prenons AD = A'B' et menons DE parallèle à BC. Nous obtenons ainsi un triangle ADE semblable au triangle ABC, et il suffit de prouver que ce triangle ADE est égal au triangle A'B'C'. Pour cela, observons que la similitude de ADE et de ABC donne

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}.$$

Comme AD = A'B' par construction, la comparaison de ces égalités à celles qu'on a par hypothèse donne

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{et} \quad \frac{A'C'}{AC} = \frac{AE}{AC}.$$

Les dénominateurs de la première égalité étant égaux, il faut que les numérateurs le soient aussi ; donc DE = B'C' et de même AE = A'C'. Les deux triangles ADE et A'B'C' sont donc égaux (3e cas d'égalité) et le théorème est démontré.

144. **Théorème.** — *Deux triangles qui ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires sont semblables.*

Appelons, en effet, ABC et A'B'C' ces deux triangles. On sait que les angles qui se correspondent sont égaux ou supplémentaires (25 et 26). Nous allons montrer qu'ils sont égaux. En effet, si deux couples d'angles qui se correspondent étaient supplémentaires, on aurait, par exemple,

$$A + A' = 2^{dr},$$
$$B + B' = 2^{dr},$$

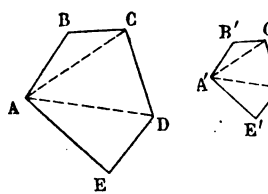
et la somme des six angles serait supérieure à 4^{dr}, ce qui est impossible (68). Donc on a nécessairement A = A', B = B' et par suite C = C' (69, 2e). Mais alors les deux triangles ont semblables (1er cas).

145. **Théorème.** — *Deux polygones semblables sont dé-*

composables en un même nombre de triangles semblables et semblablement placés.

Soient ABCDE, A'B'C'D'E' deux polygones semblables. Menons les diagonales AC, AD du premier polygone et les diagonales homologues A'C', A'D' du second, de sorte que les deux polygones sont décomposés en un même nombre de triangles. Il s'agit de prouver que les triangles du premier polygone sont respectivement semblables aux triangles du second et semblablement disposés.

Il est visible, d'abord, que ABC est semblable à A'B'C', puisque, par hypothèse, $B = B'$ et $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$. Il suit de là qu'il y a égalité entre $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$ d'une part, entre $\widehat{BCA}$, $\widehat{B'C'A'}$ de l'autre. Retranchons alors $\widehat{BCA}$ de l'angle C et $\widehat{B'C'A'}$ de l'angle C' égal à C par hypothèse : les différences obtenues, $\widehat{ACD}$ et $\widehat{A'C'D'}$, seront alors deux angles égaux. Cela posé, les deux triangles ACD et A'C'D' sont semblables en vertu du deuxième cas de similitude.



En effet, on vient de démontrer que l'angle ACD est égal à l'angle A'C'D' ; d'autre part, la similitude des triangles ABC, A'B'C' donne $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$; enfin, la similitude des deux polygones donne $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$. Il en résulte $\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$ et, par suite, la similitude des deux triangles ACD, A'C'D'. On démontrerait de même la similitude des autres triangles.

Si nous ajoutons maintenant que le triangle ACD présente évidemment par rapport à ABC la même disposition que A'C'D' par rapport à A'B'C', et ainsi de suite, le théorème sera démontré.

146. Théorème. — *Réciproquement, deux polygones composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés sont semblables.*

Soient ABCDE, A'B'C'D'E' (même figure) les deux polygones

composés chacun de trois triangles tels que les triangles du premier soient respectivement semblables aux triangles du second et tels de plus que ces triangles soient semblablement placés dans les deux polygones.

1° Les angles des deux polygones sont égaux, chacun à chacun, comme sommes d'angles égaux. Par exemple, $\widehat{BCD} = \widehat{B'C'D'}$, parce que $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$ et que $\widehat{ACD} = \widehat{A'C'D'}$.

2° Les côtés homologues sont proportionnels, car la similitude des triangles correspondants donne

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC},$$

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'D'}{AD},$$

$$\frac{A'D'}{AD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{A'E'}{AE}.$$

La comparaison de toutes ces égalités démontre la proportionnalité des côtés :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'F'}{EF}.$$

147. Remarque. — Ce théorème prouve qu'il existe des polygones semblables et donne le moyen d'en construire.

148. Théorème. — *Le rapport des périmètres de deux polygones semblables est égal au rapport de deux côtés homologues.*

On appelle *périmètre* d'une ligne polygonale la somme des longueurs de ses côtés.

Considérons encore les deux polygones semblables ABCDE, A'B'C'D'E' (même figure). On a

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA}.$$

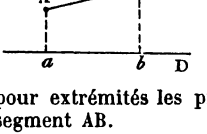
On sait (V. *Arithm.*, 151) que si l'on ajoute les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, on obtient un rapport égal à chacun des rapports précédents ; on a donc

$$\frac{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'}{AB + BC + CD + DE + EA} = \frac{A'B'}{AB}.$$

C. Q. F. D.

Relations entre les côtés d'un triangle rectangle.

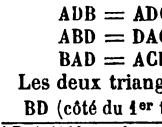
149. Définitions. — On appelle *projection* d'un point A sur une droite D le point *a*, pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur D.



On appelle *projection* d'un segment AB sur la droite D, le segment *ab* de cette droite D qui a pour extrémités les projections des extrémités A et B du segment AB.

150. Théorème. — *La perpendiculaire menée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.*

Soit AD la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC sur l'hypoténuse. Cette perpendiculaire partage le triangle ABC en deux autres triangles rectangles ABD, ADC qui ont leurs angles égaux, chacun à chacun, savoir :



$ADB = ADC$ comme droit ;
$ABD = DAC$ comme ayant même complément BAD ;
$BAD = ACD$ pour une raison analogue.

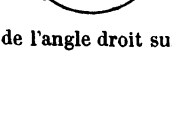
Les deux triangles sont donc semblables, et l'on a

$$\frac{\text{BD (côté du 1er triangle)}}{\text{AD (côté homologue du second)}} = \frac{\text{AD (côté du 1er triangle)}}{\text{DC (côté homologue du second)}},$$

ou, ce qui revient au même,

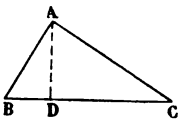
$$\overline{AD}^2 = BD \times DC.$$

151. Corollaire. — *La perpendiculaire menée d'un point d'une circonférence sur un diamètre est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur le diamètre.*



Car si MP est cette perpendiculaire et si l'on joint le point M aux extrémités A et B du diamètre, on obtient un triangle rectangle AMB dans lequel MP est la perpendiculaire menée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.

152. Théorème. — *Dans tout triangle rectangle chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse.*



Prouvons par exemple que, dans le triangle rectangle ABC, on a

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD.$$

Pour cela, remarquons que les deux triangles ABC et ABD sont rectangles, et que, de plus, les angles BAD et C sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires. L'angle B étant commun, ces deux triangles sont semblables. En écrivant que les côtés homologues sont proportionnels, on obtient

$$\frac{BC \text{ (hypoténuse du 1er)}}{AB \text{ (hypoténuse du second)}} = \frac{AB \text{ (côté du 1er)}}{BD \text{ (côté homologue du second)}}$$

Il en résulte bien

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD.$$

153. Corollaire. — *Toute corde d'un cercle est moyenne proportionnelle entre le diamètre et sa projection sur le diamètre qui passe par son extrémité.*

Cela résulte immédiatement de la considération du triangle rectangle AMB (figure du n° 151).

154. Théorème de Pythagore. — *Le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Soit, en effet, un triangle rectangle ABC (figure précédente). On a vu que l'on a

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD$$

et

$$\overline{AC}^2 = BC \times CD.$$

En ajoutant membre à membre et en mettant BC en facteur dans le second membre, on obtient

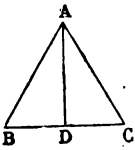
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC(BD + CD).$$

Mais $BD + CD = BC$; donc on a bien

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

155. Remarque. — Les théorèmes précédents permettent de calculer les éléments d'un triangle rectangle (côtés, hau-

teur, segments déterminés sur l'hypoténuse) quand on connaît deux de ces éléments.



Comme application, proposons-nous de calculer la hauteur d'un triangle équilatéral ABC, de côté a. Si AD est cette hauteur, le triangle rectangle ABD donne (154)

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$$

ou, en remplaçant AB par a et BD par $\frac{a}{2}$,

$$a^2 = \overline{AD}^2 + \frac{a^2}{4}.$$

On en déduit

$$\overline{AD}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4},$$

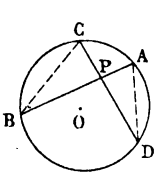
et

$$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Propriétés, en ce qui concerne le cercle, des sécantes issues d'un même point.

156. Théorème. — *Si d'un point* P *on mène des sécantes à un cercle* O, *le produit des distances de ce point aux deux points où chaque sécante coupe le cercle est le même pour toutes les sécantes.*

1° Supposons d'abord que le point P soit intérieur au cercle O, et menons deux sécantes quelconques PAB, PCD ; il s'agit de prouver que l'on a



$$PA \times PB = PC \times PD.$$

Pour cela, observons que les deux triangles PBC, PAD ont leurs angles égaux chacun à chacun, savoir :

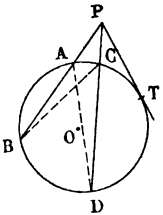
BPC = APD, comme opposés par le sommet ;

PBC = PDA, comme ayant même mesure, la moitié de l'arc AC. Il en résulte que les troisièmes angles sont égaux et que les deux triangles sont semblables. En écrivant alors que les côtés homologues sont proportionnels, on a

$$\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA}$$

ou $$PB \times PA = PC \times PD.$$

2° Supposons maintenant que le point P soit extérieur, et considérons encore deux sécantes quelconques PAB, PCD ; il s'agit de prouver que l'on a



$$PA \times PB = PC \times PD.$$

Pour cela, on observe encore que les deux triangles PBC, PAD sont semblables parce qu'ils ont leurs angles égaux, chacun à chacun. On en déduit

$$\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA}$$

ou $$PA \times PB = PC \times PD.$$

157. Théorème. — *Si d'un point pris hors d'un cercle on lui mène une tangente et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

Supposons que l'on mène du point P (même figure) la tangente PT et la sécante PAB ; il s'agit de prouver que l'on a

$$\overline{PT}^2 = PA \times PB.$$

Pour cela, menons une sécante quelconque PCD, et supposons que cette sécante tourne autour du point P jusqu'à ce que les points C et D viennent se confondre avec le point T. On a toujours, pour toutes les positions de la sécante PCD,

$$PC \times PD = PA \times PB.$$

Si donc C et D viennent coïncider avec T, on aura

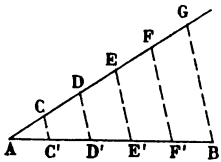
$$\overline{PT}^2 = PA \times PB.$$

158. Remarque. — Le produit constant $PA \times PB$ s'appelle la *puissance* du point P par rapport à la circonférence O.

Constructions géométriques.

159. Problème I. — *Diviser une droite donnée en parties égales.*

Soit à diviser la droite AB en cinq parties égales. Pour cela, menons par le point A une droite quelconque, et portons sur cette droite, à partir du point A, cinq longueurs égales, AC, CD, DE, EF, FG. Joignons le point G au point B, et menons ensuite par les points C, D, E, F les parallèles à GB. Ces parallèles partagent AB en parties égales, puisqu'on a (135)

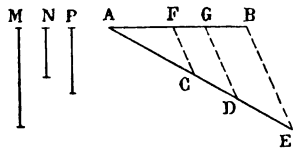


$$\frac{AC}{AC'} = \frac{CD}{C'D'} = \cdots = \frac{FG}{F'B},$$

et que tous les numérateurs sont égaux.

160. Problème II. — *Diviser une droite en parties proportionnelles à des longueurs données.*

Soit à diviser la droite AB en parties proportionnelles aux trois longueurs M, N, P. Comme pour le problème précédent, menons par le point A une droite indéfinie quelconque, et portons sur cette droite les longueurs AC, CD, DE respectivement égales à M, N, P. Joignons ensuite E à B et menons par les points C et D les parallèles à la droite BE ; les segments AF, FG, GB ainsi obtenus résolvent la question, puisque l'on a (135)

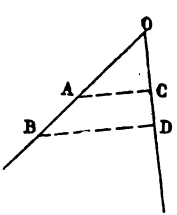


$$\frac{AF}{AC} = \frac{FG}{CD} = \frac{GB}{DE} \quad \text{ou} \quad \frac{AF}{M} = \frac{FG}{N} = \frac{GB}{P}.$$

161. Problème III. — *Construire la quatrième proportionnelle à trois longueurs données* M, N, P.

Par définition (V. *Arithm.*, 159) la longueur inconnue, x, doit vérifier la relation

$$\frac{M}{N} = \frac{P}{x}.$$

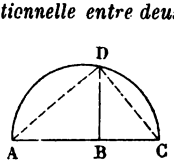


Construisons un angle quelconque BOD, et, sur les côtés de cet angle, portons OA = M, AB = N, OC = P. Joignons A et C, et

menons ensuite BD parallèle à AC ; CD est la quatrième proportionnelle demandée. On a en effet (132)

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD} \qquad \text{ou} \qquad \frac{M}{N} = \frac{P}{CD}.$$

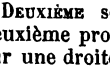
162. Problème IV. — *Construire la moyenne proportionnelle entre deux longueurs données a et b.*



Première solution. — Cette solution est basée sur la première propriété des triangles rectangles (150). Sur une droite indéfinie on porte $AB = a$, et, à la suite, $BC = b$, puis on décrit une demi-circonférence sur AC comme diamètre. Si D est le point de rencontre de cette demi-circonférence avec la perpendiculaire à AC menée par le point B, BD est la moyenne proportionnelle demandée. En effet, dans le triangle rectangle ADC on a

$$\overline{BD}^2 = AB \times BC \qquad \text{ou} \qquad \overline{BD}^2 = a \times b.$$

Deuxième solution. — Cette solution est basée sur la deuxième propriété des triangles rectangles (152). On porte, sur une droite indéfinie et à partir du même point, les longueurs AB et AC respectivement égales à a et à b. Sur la plus grande, AB, de ces deux longueurs comme diamètre on décrit une demi-circonférence, et l'on prend le point de rencontre, D, de cette demi-circonférence avec la perpendiculaire à AB menée par le point C. Si l'on mène alors AD, cette longueur est la moyenne proportionnelle demandée, car, dans le triangle rectangle ADB, on a



$$\overline{AD}^2 = AB \times AC \qquad \text{ou} \qquad \overline{AD}^2 = a \times b.$$

Polygones réguliers.

163. Définitions. — On dit qu'un polygone est *régulier* quand il a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux. Le triangle équilatéral et le carré sont des polygones réguliers.

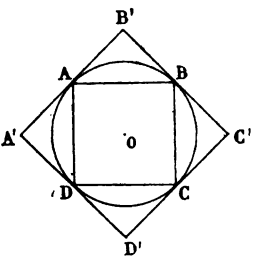
On dit qu'un polygone est *inscrit* dans un cercle quand il a tous ses sommets sur la circonférence ; on dit qu'il est

circonscrit à un cercle quand tous ses côtés sont tangents à la circonférence.

Il n'est pas évident *a priori* qu'il existe des polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés. Mais, si l'on observe qu'on peut toujours concevoir qu'une circonférence ait été partagée en autant de parties égales que l'on veut, le théorème suivant le démontre.

164. Théorème. — *Lorsqu'une circonférence est divisée en n parties égales, si l'on joint les points de division consécutifs, on obtient un polygone régulier de n côtés et, si l'on mène les tangentes aux points de division consécutifs, on obtient également un polygone régulier de n côtés.*

Soient ABCD.... le polygone formé en joignant les points de division, A'B'C'D'.... le polygone formé par les tangentes en ces points.



1° *Le polygone* ABCD.... *est régulier*. — En effet : ses côtés AB, BC, CD, etc. sont égaux, parce qu'ils sous-tendent des arcs égaux ; ses angles sont égaux, parce que ce sont des angles inscrits ayant des mesures égales.

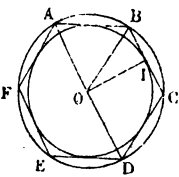
2° *Le polygone* A'B'C'D'.... *est régulier*. — Considérons en effet les triangles AA'D, BB'A, CC'B, etc. L'un quelconque de ces triangles est isocèle, parce que les angles à la base sont égaux comme ayant même mesure (117). Deux quelconques de ces triangles sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun. Il suit de là que les angles A', B', C', ... du polygone sont égaux, et qu'il en est de même des segments AA', AB', BB', etc....; mais alors les côtés du polygone sont aussi égaux.

Le premier polygone est inscrit dans la circonférence O et le second est circonscrit à cette circonférence.

165. Théorème. — *Tout polygone régulier peut être inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre cercle.*

1° Soit ABCDEF un polygone régulier. Considérons la circonférence qui passe par trois sommets consécutifs A, B, C; cette circonférence passe aussi par le point D. En effet, soit

OI la perpendiculaire au côté BC menée par le centre de la circonférence ; on sait que le point I est le milieu de BC. Si l'on replie alors la figure autour de OI pour amener IB sur son égal IC (ce qui est possible, puisque les angles en I sont droits), à cause de l'égalité des angles B et C du polygone, le côté BA prendra la direction du côté CD ; mais BA étant égal à CD, le point A viendra coïncider avec le point D, de sorte que le quadrilatère OIBA coïncidera avec le quadrilatère OICD. Il suit de là que OA = OD et que la circonférence de centre O et de rayon OA, circonférence qui passe par A, B, C, passe aussi par le point D. On verrait d'une manière analogue qu'elle passe par les autres sommets du polygone, ce qui démontre que le polygone peut être inscrit dans un cercle.



2° Puisque le polygone est inscrit dans le cercle O, les côtés du polygone sont des cordes égales qui s'écartent également du centre (95). Si donc du point O comme centre on décrit une circonférence de rayon OI, cette circonférence passera par les milieux des côtés du polygone et sera tangente en ces points aux côtés correspondants, en vertu de la propriété de la tangente. Il en résulte que le polygone peut être circonscrit à un cercle.

166. Définitions. — On appelle *centre* d'un polygone régulier, le centre de la circonférence inscrite dans ce polygone ou, ce qui revient au même, le centre de la circonférence circonscrite à ce polygone. On appelle *rayon* du polygone le rayon de la circonférence circonscrite et *apothème* le rayon de la circonférence inscrite.

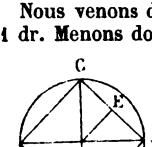
On appelle *angle au centre* d'un polygone régulier, l'angle formé par les rayons qui vont du centre aux extrémités d'un côté.

Si l'on joint le centre O d'un polygone régulier de n côtés aux sommets, on partage le polygone en n triangles isocèles égaux. Dans tous ces triangles les angles en O sont égaux à l'angle au centre du polygone ; de sorte que si le polygone est convexe, comme la somme de tous ces angles vaut 4 dr. (22), chacun d'eux sera égal à $\frac{4}{n}$ droits. Par exemple, l'angle au

centre d'un triangle équilatéral vaut $\frac{4}{3}$ de droit ou $\frac{360}{3} = 120°$; l'angle au centre d'un carré vaut $\frac{4}{4} = 1$ dr; l'angle au centre d'un hexagone régulier vaut $\frac{2}{3}$ de droit ou $\frac{360}{6} = 60°$, etc.

167. Problème. — *Inscrire un carré dans un cercle.*

Nous venons de voir que l'angle au centre du carré vaut 1 dr. Menons donc, d'après cela, deux diamètres rectangulaires du cercle, et soient A, B, C, D les points de rencontre de ces diamètres avec la circonférence. Les points A, C, B, D partagent la circonférence en quatre parties égales; par suite, la figure ACBD est un carré (164).



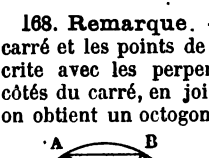
Il est facile de calculer le côté de ce carré au moyen du rayon R du cercle circonscrit. En effet, le triangle rectangle OBC donne

$$\overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = 2R^2,$$
$$BC = R\sqrt{2}.$$

L'apothème OE est la moitié du côté, car le triangle OEB est un triangle rectangle et isocèle, de sorte que $OE = EB$; et comme $EB = EC$, on a $OE = \frac{BC}{2}$. On aura donc

$$OE = \frac{BC}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

168. Remarque. — Si l'on considère les sommets du carré et les points de rencontre de la circonférence circonscrite avec les perpendiculaires menées par le centre aux côtés du carré, en joignant les points de division consécutifs on obtient un octogone régulier inscrit, et ainsi de suite.



169. Problème. — *Inscrire un hexagone régulier dans un cercle.*

Supposons le problème résolu et soit ABCDEF l'hexagone demandé. Si nous menons OA et OB, l'angle AOB est égal à 60° (166), de sorte que la somme des angles A et B du

triangle AOB est égale à 120°, puisque la somme des trois angles est égale à 180°.

Mais le triangle AOB étant isocèle, les angles A et B de ce triangle sont égaux; donc chacun d'eux est égal à $\frac{120}{2} = 60°$.

Il en résulte que les angles du triangle AOB sont égaux, que le triangle est équilatéral, et enfin que le côté AB de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon OA du cercle.

170. **Problème.** — *Inscrire un triangle équilatéral dans un cercle.*

Soit ABCDEF (même figure) l'hexagone régulier inscrit dans le cercle O. Si l'on joint les points de division de deux en deux, on obtient le triangle équilatéral inscrit ACE.

On peut se proposer de calculer le côté de ce triangle au moyen du rayon du cercle circonscrit. Pour cela, il suffit de remarquer que les côtés AC, CD, DA du triangle ACD, rectangle en C, sont égaux respectivement au côté du triangle équilatéral, au côté de l'hexagone régulier, c'est-à-dire au rayon, et au diamètre. Or, on a

$$\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2;$$

on en déduit

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$

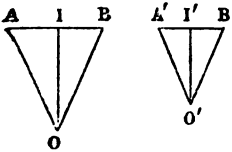
et enfin $$CD = R\sqrt{3}.$$

171. **Théorème.** — *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables et le rapport de leurs périmètres est égal au rapport des rayons ou des apothèmes.*

En effet, les angles de l'un quelconque de ces polygones sont égaux, puisque le polygone est régulier. Or, si le polygone a n côtés, nous avons vu (71) que la somme de ses angles est $(2n - 4)$ droits; il en résulte que chacun des angles vaut

$$\frac{2n-4}{n} \text{ droits,}$$

aussi bien pour le premier polygone que pour le second; donc les deux polygones ont leurs angles égaux, chacun à chacun. Il est clair d'ailleurs que les côtés homologues sont proportionnels; donc les deux polygones sont semblables.



Il reste à trouver le rapport de leurs périmètres. Pour

cela, il faut se rappeler que le rapport des périmètres de deux polygones semblables est égal au rapport de deux côtés homologues (148). Cela posé, soient AB, A'B' les côtés des deux polygones, de centres respectifs O et O'. Les deux triangles AOB, A'O'B' sont isocèles et ont les angles en O et en O' égaux comme angles au centre de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés ; donc les angles à la base sont égaux et les deux triangles sont semblables. Il en résulte que le rapport $\frac{AB}{A'B'}$ est égal au rapport $\frac{OA}{O'A'}$ des rayons. Mais, si l'on mène les apothèmes OI et O'I', les triangles rectangles OIA, O'I'A' sont aussi équiangles, et par suite semblables ; on a donc aussi

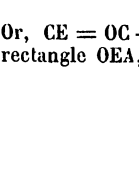
$$\frac{OA}{O'A'} = \frac{OI}{O'I'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Ainsi, en appelant P et P' les périmètres des deux polygones, on a bien

$$\frac{P}{P'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{OI}{O'I'}.$$

172. **Problème.** — *Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon* R, *calculer le côté du polygone régulier d'un nombre double de côtés inscrit dans le même cercle.*

Soit AB le côté du polygone régulier inscrit de n côtés. Si par le centre O on mène les perpendiculaires aux côtés du polygone, ces perpendiculaires partagent en deux parties égales les arcs sous-tendus par les côtés ; de sorte que la circonférence est partagée en $2n$ parties égales par les points de division ainsi obtenus et par les sommets du polygone donné. Si donc OC est l'une des perpendiculaires, AC sera le côté à calculer du polygone de $2n$ côtés.



Pour le calculer, appelons R le rayon du cercle et posons $AB = a$. Si E est le point de rencontre de OC avec AB, on a (153)

$$\overline{AC}^2 = CD \times CE = 2R \times CE.$$

Or, $CE = OC - OE = R - OE$; d'autre part, dans le triangle rectangle OEA, on a

$$\overline{OE}^2 + \overline{EA}^2 = \overline{OA}^2,$$

c'est-à-dire $\overline{OE}^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$;

d'où l'on tire $OE = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$,

et par suite

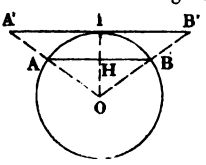
$$\overline{AC}^2 = 2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\right),$$

$$AC = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\right)}.$$

En multipliant AC par $2n$, on obtient le périmètre du polygone de $2n$ côtés.

173. **Problème.** — *Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit, calculer le côté du polygone régulier circonscrit d'un même nombre de côtés.*

Soit $AB = a$ le côté du polygone régulier donné. Si l'on mène la perpendiculaire OI à AB, le point I est le milieu de l'arc AB. Imaginons alors qu'on ait mené toutes les perpendiculaires analogues à OI et que l'on ait pris tous les points analogues au point I ; tous ces points partagent la circonférence en parties égales, de sorte que les tangentes en ces points forment un polygone régulier circonscrit, et ce polygone a le même nombre de côtés que le polygone donné, puisqu'il y a autant de points I que de côtés analogues à AB. D'ailleurs, si l'on mène les rayons OAA', OBB', l'angle $A'OB' = AOB$ vaut $\frac{4}{n}$ droits, si n est le nombre des côtés du polygone donné ; il en résulte que A'OB' est l'angle au centre du nouveau polygone et que A'B' en est le côté.



Cela posé, on a

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OI}{OH} = \frac{R}{OH};$$

mais nous avons vu plus haut (172) que

$$OH = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}};$$

donc $$A'B' = \frac{Ra}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{2Ra}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

Rapport de la circonférence au diamètre.

174. **Définitions.** — On appelle *ligne brisée régulière* une ligne brisée qui a ses côtés égaux, ses angles égaux et qui est telle que de trois côtés consécutifs le premier et le troisième sont du même côté par rapport au deuxième. On démontre comme au n° 165 qu'une ligne brisée régulière peut être inscrite à un cercle et circonscrite à un autre cercle concentrique au premier. Le centre commun à ces deux cercles s'appelle le *centre* de la ligne brisée. On définit le *rayon* et l'*apothème* comme pour les polygones réguliers.

Une ligne brisée régulière ou non est *convexe* quand tous ses côtés sont du même côté par rapport à l'un d'eux prolongé indéfiniment.

175. **Définition de la longueur d'une circonférence.** — On ne peut pas faire coïncider un arc de cercle, quelque petit qu'il soit, ni avec un segment de droite, ni avec un arc de cercle de rayon différent. On ne peut donc pas mesurer les arcs au moyen des droites et, dans tous les cas, si l'on parle de cette mesure ainsi faite, il importe de définir nettement ce qu'on entend par là.

On appelle alors *longueur* d'un arc de cercle la limite commune vers laquelle tendent les périmètres des lignes brisées régulières convexes inscrites et circonscrites à cet arc, quand le nombre des côtés de ces lignes augmente indéfiniment, de manière que chacun des côtés tende vers zéro.

De même, on appelle *longueur* d'une circonférence la limite commune vers laquelle tendent les périmètres des polygones réguliers convexes inscrits et circonscrits à cette circonférence, quand le nombre des côtés de ces polygones augmente indéfiniment, de manière que chacun des côtés tende vers zéro.

On démontre, d'ailleurs : 1° que les périmètres des polygones inscrits ont une limite ; 2° que les périmètres des polygones circonscrits ont une limite qui est la même que celle des périmètres des polygones inscrits ; 3° que cette

limite commune est indépendante de la loi d'accroissement du nombre des côtés.

176. **Théorème.** — *Les longueurs de deux circonférences sont proportionnelles aux rayons.*

Appelons, en effet, C et C' les longueurs de deux circonférences de rayons respectifs R et R'. Dans ces circonférences, inscrivons deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, et soit P le périmètre du polygone inscrit dans la première, P' celui du polygone inscrit dans la deuxième. Nous avons vu que l'on a

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'}.$$

Mais cette égalité a lieu quel que soit le nombre des côtés des deux polygones. D'autre part, quand le nombre des côtés augmente indéfiniment, de manière que chaque côté tende vers zéro, P et P' ont respectivement pour limites C et C'. On a donc

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}.$$

177. **Corollaire.** — *Le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre constant, c'est-à-dire le même pour toutes les circonférences.*

L'égalité $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$ peut en effet s'écrire successivement

$$\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$$

et

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Pour une autre circonférence de rayon R" on aurait encore

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'} = \frac{C''}{2R''}, \text{ etc.,}$$

ce qui démontre la proposition.

178. **Définition du nombre** π. — Le rapport constant de la circonférence au diamètre a été désigné par la lettre π et s'appelle le nombre π. Ce nombre est incommensurable, et Archimède, qui l'a calculé le premier, a trouvé comme valeur approchée $\frac{22}{7}$.

Si l'on connaissait ce nombre π, en appelant C la longueur

d'une circonférence de rayon R, on aurait

$$\frac{C}{2R} = \pi,$$

$$C = 2\pi R,$$

$$R = \frac{C}{2\pi},$$

ce qui donnerait le moyen de calculer la longueur d'une circonférence quelconque connaissant son rayon, ou inversement. Il importe donc de calculer le nombre π, et nous allons indiquer rapidement comment on peut y parvenir.

179. **Calcul de π.** — Reprenons la formule $\frac{C}{2R} = \pi$. Si dans cette formule on suppose $2R = 1$, on a $\pi = C$. Si on suppose $C = 2$, on a $\pi = \frac{1}{R}$ ou $\frac{1}{\pi} = R$. D'après cela : 1° Si l'on peut calculer des valeurs approchées de la longueur d'une circonférence de diamètre 1, ces valeurs approchées seront aussi des valeurs approchées de π; 2° Si l'on peut calculer des valeurs approchées du rayon d'une circonférence de longueur 2, les valeurs approchées de ce rayon seront aussi des valeurs approchées de $\frac{1}{\pi}$. De là deux méthodes pour calculer π et qu'on appelle : la première, *méthode des périmètres*; la deuxième, *méthode des isopérimètres*.

Nous nous bornerons à quelques indications concernant la première.

Dans la circonférence de diamètre 1, on inscrit un polygone régulier dont le côté soit facile à calculer à l'aide du rayon, par exemple un carré ou un hexagone. On calcule le côté de ce polygone, puis celui du polygone régulier circonscrit d'un même nombre de côtés (173). On en déduit les périmètres de ces deux polygones; comme la circonférence est comprise entre les deux, ces périmètres sont des valeurs approchées de la longueur de la circonférence, et par suite de π, la première par défaut, la deuxième par excès.

On calcule alors le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés (172), puis celui du polygone régulier circonscrit correspondant (173). On en déduit les périmètres de ces polygones, par suite deux nouvelles valeurs

approchées de la longueur de la circonférence, c'est-à-dire de π, l'une par défaut et l'autre par excès. En faisant la différence de ces valeurs approchées, on a une limite de l'erreur commise. On continue alors les mêmes opérations jusqu'à ce que l'on ait obtenu π avec l'approximation que l'on désire, ce qui est toujours possible.

180. **Problème.** — *Calculer la longueur d'un arc de cercle connaissant l'angle au centre et le rayon.*

Soit n la mesure de l'angle au centre exprimé en degrés, minutes et secondes. A l'angle au centre de 360° correspond la circonférence entière, dont la longueur est $2\pi R$, R désignant le rayon. Puisqu'il y a proportionnalité entre les angles au centre et les arcs correspondants (112), à l'angle au centre de 1° correspond donc un arc dont la longueur est $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$, par suite à l'angle au centre dont la mesure est n correspond un arc dont la longueur est $\frac{\pi R n}{180}$. Telle est l'expression qui permet de calculer la longueur cherchée.

LIVRE IV : LES AIRES

Aire d'un polygone quelconque.

181. **Définitions.** — On appelle *aire* l'étendue d'une portion limitée de surface. On dit fréquemment *surface* d'un polygone au lieu de dire *aire* d'un polygone.

On dit que deux surfaces sont *équivalentes* quand elles ont la même aire, qu'elles soient ou qu'elles ne soient pas superposables.

Mesurer une aire, c'est la comparer à une autre aire prise pour unité (V. *Arithm.*, 161).

On prend pour unité d'aire l'aire du carré construit sur l'unité de longueur ; *de cette manière la mesure de certaines aires se ramène, comme on le verra, à la mesure de certaines longueurs.*

Suivant que l'unité de longueur est le *mètre*, l'*hectomètre*,

le *centimètre*, etc., l'unité de surface est le *mètre carré*, l'*hectomètre carré*, le *centimètre carré*, etc. Rappelons, d'ailleurs, que l'hectomètre carré vaut 100 décamètres carrés, que le mètre carré vaut 100 décimètres carrés, etc. *En d'autres termes, chaque unité d'aire vaut 100 fois l'unité d'aire immédiatement inférieure.*

Dans les mesures des champs, on appelle *mesures agraires* l'*hectare*, l'*are* et le *centiare*. Elles sont respectivement équivalentes à l'hectomètre carré, au décamètre carré et au mètre carré.

Dans un triangle on appelle *base* et *hauteur correspondante* un côté quelconque et la perpendiculaire à ce côté menée par le sommet opposé.

On appelle *base* d'un parallélogramme un côté quelconque ; la *hauteur* est alors la distance de ce côté au côté qui lui est parallèle. En particulier, dans un rectangle la hauteur qui correspond à un côté est égale au côté non parallèle à celui-là.

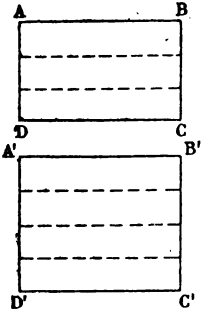
On appelle *trapèze* un quadrilatère dont deux côtés seulement sont parallèles. Ces côtés parallèles s'appellent alors les *bases* du trapèze, et l'on appelle *hauteur* la distance des bases.

182. Théorème. — *Le rapport des aires de deux rectangles qui ont même base est égal au rapport des hauteurs.*

Observons d'abord que si deux rectangles ont des bases égales et des hauteurs égales, ils sont superposables. Cela posé, considérons deux rectangles ABCD, A'B'C'D' ayant des bases égales, DC = D'C', et supposons qu'une même longueur soit contenue 3 fois dans la hauteur AD du premier et 4 fois dans la hauteur A'D' du second, de sorte que $\frac{AD}{A'D'} = \frac{3}{4}$; il s'agit alors de prouver que

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{3}{4},$$

en appelant ABCD et A'B'C'D' les aires respectives des deux rectangles.



Pour cela, partageons AD en 3 parties égales, A'D' en 4 parties égales, et, par les points de division, menons des parallèles aux bases respectives. Nous partageons ainsi le premier rectangle en 3 rectangles égaux comme ayant des bases égales et des hauteurs égales ; nous partageons de même le second rectangle en 4 rectangles égaux pour la même raison ; enfin, les rectangles partiels du premier sont égaux aux rectangles partiels du second, toujours pour la même raison. Il en résulte que le même rectangle est contenu 3 fois dans ABCD, 4 fois dans A'B'C'D', et par suite que l'on a

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{4}{3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{AD}{A'D'}.$$

183. **Remarque.** — Comme on peut prendre pour base un côté quelconque du rectangle, on peut dire aussi que *le rapport des aires de deux rectangles qui ont même hauteur est égal au rapport des bases.*

184. **Théorème.** — *Le rapport des aires de deux rectangles quelconques est égal au produit du rapport des bases par le rapport des hauteurs.*

Soient R et R' les aires de deux rectangles de bases respectives b et b' et de hauteurs respectives h et h'. Appelons R'' l'aire d'un rectangle de base b et de hauteur h'. On a (183)

$$\frac{R''}{R'} = \frac{b}{b'};$$

d'autre part, on a aussi (182)

$$\frac{R}{R''} = \frac{h}{h'}.$$

En multipliant membre à membre, il vient

$$\frac{R}{R'} = \frac{b}{b'} \times \frac{h}{h'}.$$

185. **Théorème.** — *L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

On veut dire, par là, que l'aire d'un rectangle a pour mesure le produit du nombre qui mesure sa base par le nombre qui mesure sa hauteur.

Appelons, en effet, R l'aire du rectangle considéré, de base b et de hauteur h, et supposons que le rectangle R′ du théorème précédent soit le carré construit sur l'unité de longueur. Alors, dans l'égalité

$$\frac{R}{R'} = \frac{b}{b'} \times \frac{h}{h'},$$

R′ étant l'unité d'aire, b' et h' les unités de longueur, le rapport $\frac{R}{R'}$ est le nombre qui mesure l'aire du rectangle (V. *Arithm.*, 162) ; de même $\frac{b}{b'}$ et $\frac{h}{h'}$ sont les nombres qui mesurent respectivement la base et la hauteur de ce rectangle.

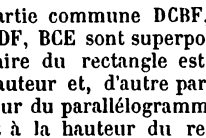
L'égalité précédente exprime donc le théorème énoncé.

186. Corollaire. — *L'aire d'un carré est égale au carré de son côté.*

Le carré est en effet un rectangle dont la base est égale à la hauteur.

187. Théorème. — *L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

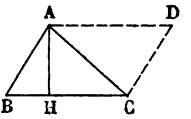
Menons en effet des sommets C et D du parallélogramme ABCD les perpendiculaires CE et DF à la base AB. Les deux triangles rectangles ADF, BCF ainsi obtenus sont égaux, parce que AD = BC et que DF = CE comme parallèles comprises entre parallèles. Si donc on considère le parallélogramme ABCD et le rectangle DCEF, on voit qu'ils sont équivalents, parce qu'ils ont une partie commune DCBF, et que les parties non communes ADF, BCE sont superposables. Mais nous venons de voir que l'aire du rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur et, d'autre part, il est visible que la base et la hauteur du parallélogramme sont respectivement égales à la base et à la hauteur du rectangle. Il en résulte que l'aire du parallélogramme est bien égale au produit de sa base par sa hauteur.



188. Corollaire. — *Deux parallélogrammes qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont équivalents.*

189. Théorème. — *L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

Menons en effet par le sommet A d'un triangle ABC la parallèle au côté BC, et par le sommet C la parallèle au côté AB. Nous obtenons ainsi un parallélogramme ABCD qui a même base et même hauteur que le triangle. L'aire de ce parallélogramme est le double de l'aire du triangle ABC, car les deux triangles ABC, ADC sont égaux comme ayant les trois côtés égaux, chacun à chacun. Comme l'aire du parallélogramme est égale au produit de la base par la hauteur, l'aire du triangle, qui en est la moitié, sera égale à la moitié de ce produit. Ainsi, on a bien



$$\text{aire ABC} = \frac{1}{2}\text{BC} \times \text{AH}.$$

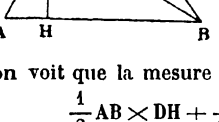
190. Corollaires. — 1° *Deux triangles qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont équivalents ;*

2° *Le rapport des aires de deux triangles qui ont des bases égales est égal au rapport des hauteurs ;*

3° *Le rapport des aires de deux triangles qui ont des hauteurs égales est égal au rapport des bases.*

191. Théorème. — *L'aire d'un trapèze est égale au produit de la demi-somme des bases par la hauteur.*

Dans le trapèze ABCD menons en effet la diagonale BD ; nous partageons ainsi le trapèze en deux triangles ABD, BDC dont les mesures respectives sont



$$\frac{1}{2}\text{AB} \times \text{DH} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\text{DC} \times \text{DH}.$$

Comme l'aire du trapèze est la somme des aires de ces triangles, on voit que la mesure de l'aire du trapèze sera

$$\frac{1}{2}\text{AB} \times \text{DH} + \frac{1}{2}\text{DC} \times \text{DH} = \frac{\text{AB} + \text{CD}}{2} \times \text{DH}.$$

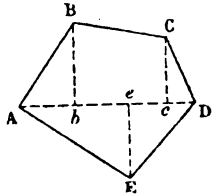
192. Remarque. — Par le milieu E de AD menons la parallèle EFG aux bases du trapèze. Les deux triangles semblables DEF, DAB donnent alors

$$\frac{EF}{AB} = \frac{DF}{DB} = \frac{DE}{DA} = \frac{1}{2},$$

ce qui montre que EF est la moitié de AB et que le point F est le milieu de DB. En considérant alors les deux triangles semblables BFG, BCD, on voit de même que FG est la moitié de CD et que le point G est le milieu de BC. Il en résulte que *la ligne qui joint les milieux des deux côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux bases et égale à la demi-somme des bases.*

En rapprochant ce résultat du théorème précédent, on voit que l'*aire d'un trapèze est égale au produit de la ligne qui joint les milieux des côtés non parallèles par la hauteur.*

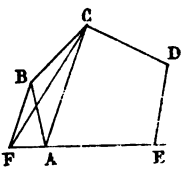
193. Aire d'un polygone quelconque. — Pour trouver l'aire d'un polygone quelconque on le décompose en triangles par des diagonales issues du même sommet, on évalue l'aire de chacun de ces triangles et on fait la somme des aires ainsi obtenues.



On peut encore mener une diagonale quelconque AD, abaisser des sommets du polygone des perpendiculaires Bb, Cc, Ee sur cette diagonale et faire la somme des aires des trapèzes et des triangles rectangles ainsi obtenus dans le polygone.

194. Problème — *Construire un polygone équivalent à un polygone donné et ayant un côté de moins.*

Soit le polygone ABCDEF ; menons la diagonale AC et la parallèle BF à cette diagonale, jusqu'au point de rencontre F avec le côté AE, puis joignons le point F au point C. Nous obtenons ainsi un triangle FCA qui est équivalent au triangle ABC, parce que les deux triangles ont la même base et des hauteurs égales. Il en résulte que le polygone FCDE, polygone qui a un côté de moins que le polygone donné, est équivalent à celui-ci. Le problème est ainsi résolu.



195. Problème. — *Construire un triangle équivalent un polygone donné.*

On remplace le polygone par un autre équivalent ayan

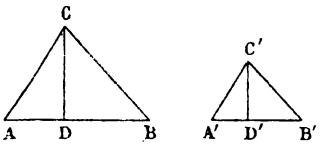
un côté de moins (194), celui-ci par un autre équivalent ayant un côté de moins, et ainsi de suite jusqu'au triangle équivalent.

196. **Définition.** — Faire la quadrature d'une figure, c'est trouver le côté du carré équivalent à cette figure. On fait la quadrature d'un triangle en construisant la moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur du triangle. En vertu du problème précédent, on peut faire la quadrature d'un polygone quelconque. *La quadrature du cercle est impossible.*

Rapport des aires de deux polygones semblables.

197. **Théorème.** — *Le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au rapport des carrés de deux côtés homologues.*

Considérons en effet deux triangles semblables ABC, A'B'C', et menons les hauteurs homologues CD, C'D'. En appelant ABC, A'B'C' les aires des deux triangles, on a



$$ABC = \frac{1}{2}AB \times CD,$$

$$A'B'C' = \frac{1}{2}A'B' \times C'D'.$$

On en déduit

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{CD}{C'D'}.$$

Mais les deux triangles rectangles ACD, A'C'D' sont semblables comme équiangles ; dès lors on a

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Or, à cause de la similitude des deux triangles donnés, on a

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'};$$

par suite

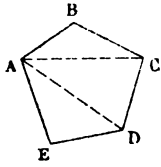
$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Donc, si l'on remplace $\frac{CD}{C'D'}$ par $\frac{AB}{A'B'}$, on obtient

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AB}{A'B'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

198. Théorème. — *Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au rapport des carrés de deux cotés homologues.*

Considérons en effet deux polygones semblables ABCDE, A'B'C'D'E', et partageons-les en triangles semblables (145) par des diagonales issues des sommets homologues A et A'. En vertu du théorème précédent, on a :



$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2},$$

$$\frac{ACD}{A'C'D'} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2},$$

$$\frac{ADE}{A'D'E'} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{D'E'}^2}.$$

Mais les seconds membres de ces égalités sont égaux à cause de la similitude des deux polygones ; donc

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{ACD}{A'C'D'} = \frac{ADE}{A'D'E'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

On en conclut, en vertu d'une propriété des rapports égaux (V. *Arithm.*, 151),

$$\frac{ABC + ACD + ADE}{A'B'C' + A'C'D' + A'D'E'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

C. Q. F. D.

Aire d'un polygone régulier et d'un cercle

199. Définitions. — On appelle *secteur polygonal régulier* la portion du plan comprise entre une ligne brisée régulière et ses deux rayons extrêmes.

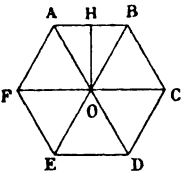
On appelle *secteur* circulaire la portion de l'aire d'

cercle comprise entre un arc de ce cercle et les deux rayons qui aboutissent aux extrémités de cet arc.

On appelle, enfin, *aire d'un cercle* la limite vers laquelle tend l'aire d'un polygone régulier convexe inscrit dans ce cercle, quand le nombre des côtés de ce polygone augmente indéfiniment de manière que chaque côté tende vers zéro. En remplaçant le cercle par un secteur circulaire et le polygone par un secteur polygonal régulier, on a la définition de l'aire d'un secteur circulaire.

200. Théorème. — *L'aire d'un polygone régulier est égale au produit du périmètre par la moitié de l'apothème.*

Soit, en effet, ABCDEF un polygone régulier de centre O.



Si on joint le point O aux sommets du polygone, on décompose le polygone en triangles isocèles qui ont des bases égales AB = BC = CD, etc., et des hauteurs égales à la hauteur OH de l'un d'eux, c'est-à-dire à l'apothème du polygone. En faisant la somme des aires de tous ces triangles, on obtient l'aire du polygone ; on a donc

$$\text{ABCDEF} = \frac{\text{AB} \times \text{OH}}{2} + \frac{\text{BC} \times \text{OH}}{2} + \frac{\text{CD} \times \text{OH}}{2} + \frac{\text{DE} \times \text{OH}}{2} + \frac{\text{EF} \times \text{OH}}{2} + \frac{\text{FA} \times \text{OH}}{2},$$

ou bien

$$\text{ABCDEF} = (\text{AB} + \text{BC} + \text{CD} + \text{DE} + \text{EF} + \text{FA}) \times \frac{\text{OH}}{2}.$$

C. Q. F. D.

201. Théorème. — *L'aire d'un cercle est égale au produit de la circonférence par la moitié du rayon.*

Soit, en effet, P l'aire d'un polygone régulier convexe inscrit dans le cercle. Appelons p le périmètre de ce polygone et a son apothème, de sorte que

$$\text{P} = \frac{pa}{2}.$$

Supposons que l'on augmente indéfiniment le nombre des côtés de ce polygone de manière que chaque côté tende vers zéro. Alors : P a pour limite la surface, S, du cercle, par définition ; p a pour limite la longueur C de la circonférence,

également par définition ; enfin a a pour limite le rayon R de cette circonférence. Il en résulte bien

$$S = \frac{C \times R}{2}.$$

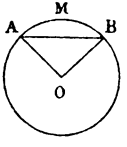
Si d'ailleurs on remplace C par $2\pi R$ (178), il vient

$$S = \pi R^2.$$

202. Théorème. — *L'aire d'un secteur circulaire est égale au produit de l'arc qui lui sert de base par la moitié du rayon.*

On démontre, comme au numéro 200, que l'*aire d'un secteur polygonal régulier est égale au produit du périmètre de la ligne brisée qui lui sert de base par la moitié du rayon.* On passe alors de là à l'aire du secteur circulaire, en raisonnant comme au numéro précédent.

D'après cela, si n est la graduation de l'arc du secteur en degrés, minutes et secondes, la longueur de cet arc étant (180) $\frac{\pi R n}{180}$, l'aire du secteur est $\frac{\pi R^2 n}{360}$.



201. Aire d'un segment de cercle. — On évalue l'aire d'un segment de cercle AMB en la considérant comme la différence des aires du secteur circulaire OAMB et du triangle OAB.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

LIVRE V : LE PLAN

Détermination du plan.

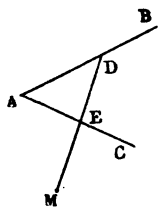
204. — Définitions. — Nous avons appelé *plan* ou surface plane (4) une surface telle qu'elle contient une droite

tout entière dès qu'elle en contient deux points. En vertu de cette définition, si une droite rencontre un plan sans être située dans ce plan, elle ne peut le rencontrer qu'en un seul point. Ce point s'appelle le *pied* de la droite sur le plan et l'on dit que la droite *perce* le plan.

205.— **Théorème.** — *Par une droite et par un point extérieur à cette droite, on peut faire passer un plan et un seul.*

Soient une droite AB et un point C extérieur à cette droite. Imaginons qu'un plan tourne autour de AB ; comme ce plan va passer successivement par tous les points de l'espace, il y a une position pour laquelle il passe par le point C. Il y a donc un plan passant par la droite AB et par le point C : soit P ce plan.

Prouvons qu'il n'y en a qu'un. Pour cela, joignons le point C à un point quelconque, A, de AB et observons d'abord que la droite AC est tout entière dans le plan P, puisqu'elle y a deux de ses points. Pour une raison toute pareille, la droite AC sera contenue dans tout plan passant par AB et par C. Cela posé, supposons alors qu'il existe un second plan, Q, passant par AB et par C ; prenons un point quelconque, M, du plan Q et, de ce point, menons dans le plan Q une droite qui rencontre AC en E et AB en D. Cette droite ayant deux points, D et E, dans le plan P, y est contenue tout entière. Il en résulte que *tout* point M du plan Q est situé dans le plan P. La réciproque se démontrant évidemment de même, il est clair que le plan Q coïncide avec le plan P et, par suite, qu'il n'y a qu'un seul plan passant par AB et par C.



206. **Corollaires.** — 1° *Par deux droites qui se coupent on peut faire passer un plan et un seul.*

2° *Par trois points non en ligne droite on peut faire passer un plan et un seul.*

3° *Par deux droites parallèles on peut faire passer un plan, par définition, et on n'en peut faire passer qu'un en vertu de 2°.*

207. **Remarque.** — On dit encore qu'un point est *déterminé : par une droite et un point extérieur ; par deux droites qui se coupent ou sont parallèles ; par trois points non en ligne droite.*

208. **Génération d'un plan.** — D'après cela, on peut concevoir qu'un plan est engendré, soit par une droite qui se meut parallèlement à elle-même en rencontrant une droite fixe, soit par une droite qui passe par un point fixe et s'appuie sur une droite fixe.

209. **Théorème.** — *Lorsque deux plans se coupent, leur intersection est une ligne droite.*

En effet, si A et B sont deux points de l'intersection des deux plans, la droite AB fait tout entière partie des deux plans (204), c'est-à-dire de leur intersection. En outre, il n'y a pas de points de l'intersection en dehors de AB, car les deux plans seraient confondus (205).

Perpendiculaires et Obliques à un plan.

210. **Définitions.** — On dit qu'une droite est *perpendiculaire* à un plan quand elle est perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied dans ce plan. On dit aussi, dans les mêmes conditions, que le plan est perpendiculaire à la droite.

On dit qu'une droite est *oblique* à un plan quand elle coupe ce plan sans lui être perpendiculaire.

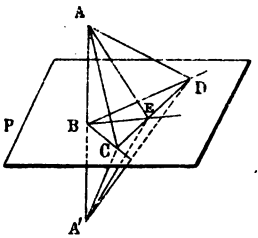
Les théorèmes suivants prouvent qu'il existe des droites perpendiculaires à un plan.

211. **Théorème.** — *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à deux droites qui passent par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.*

Supposons, en effet, que la droite AB soit perpendiculaire aux deux droites BC et BD qui passent par son pied dans le plan P, et, dans le plan P, menons une droite quelconque BE passant par B ; il suffit évidemment de prouver que AB est perpendiculaire à BE.

Pour cela, coupons les trois droites BC, BE, BD par une droite quelconque CED, nécessairement située dans le

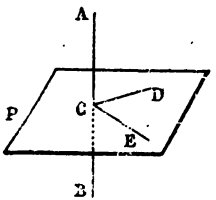
plan P (204), prolongeons BA d'une longueur BA′ = BA, et joignons le point A′ aux trois points C, E, D. Nous obtenons ainsi deux triangles ACA′, ADA′ qui sont isocèles, parce que les droites CB et DB qui joignent les sommets au milieu de la base AA′ sont perpendiculaires à cette base, par hypothèse. Il en résulte que AC = A′C et que AD = A′D, de sorte que les deux triangles ACD, A′CD ont les trois côtés égaux, chacun à chacun, et sont égaux.



Imaginons alors qu'on fasse tourner le triangle A′CD autour de CD de manière à amener le point A′ en A, ce qui est possible puisque les triangles sont égaux et que l'on fait ainsi coïncider les éléments égaux. Comme le point E reste fixe, la droite A′E vient coïncider avec AE ; il en résulte AE = A′E. Mais alors le triangle AEA′ étant isocèle, la ligne EB qui joint le point E au milieu de la base AA′ est perpendiculaire à cette base, ce qui démontre le théorème.

212. Théorème. — *Par un point* C *pris sur une droite* AB *on peut mener un plan perpendiculaire à* AB, *et on n'en peut mener qu'un.*

1° *On peut en mener un.* — Dans un plan quelconque Q passant par AB menons en effet CD perpendiculaire à AB, puis menons CE perpendiculaire à AB dans un autre plan Q′ passant aussi par AB. Les droites CD et CE déterminent un plan P qui est perpendiculaire à AB par définition.



2° *On n'en peut mener qu'un.* — Supposons en effet qu'il en existe un autre, P′. Si l'on imagine l'intersection de Q et de P′, cette droite étant située dans le plan P′ sera perpendiculaire à AB, puisque AB est perpendiculaire au plan P′ (210) ; de plus elle passera par le point C. Or, la perpendiculaire à AB, menée par le point C, dans le plan Q, est CD ; donc Q et P′ se coupent suivant CD.

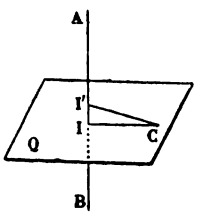
On voit de même que Q' et P' se coupent suivant CE et, par suite, que P et P' passent tous deux par CD et par CE. Mais alors P' coïncide avec P, et il n'y a qu'un seul plan mené par le point C perpendiculairement à AB.

213. Corollaire. — *Le lieu des perpendiculaires à une droite* AB *menées par le point* C *de cette droite est le plan* P *perpendiculaire à* AB *mené par le point* C.

En effet, les deux droites CD et CE (même figure) qui déterminent le plan P sont deux quelconques des perpendiculaires à AB menées par le point C. Comme le plan P est unique, il est le lieu des droites analogues à CD et à CE.

214. Théorème. — *Par un point pris hors d'une droite on peut mener un plan perpendiculaire à cette droite et on n'en peut mener qu'un.*

Soit C un point non situé sur la droite AB. Appelons P le plan déterminé par le point C et par la droite AB, et soit CI la perpendiculaire à AB menée par le point C dans le plan P. Par le point I menons le plan Q perpendiculaire à AB. Ce plan contenant toutes les perpendiculaires à AB menées par I (210), contient IC ; donc il passe par le point C, ce qui montre qu'il existe un plan mené par C perpendiculairement à AB.

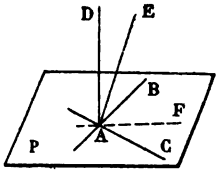


Il n'en existe qu'un, car s'il en existait un autre coupant AB en un point I' distinct du point I, la droite AB serait perpendiculaire à CI'. Mais alors on pourrait mener par le point C, *dans le plan* P, deux droites CI et CI' perpendiculaires à AB, ce qui est impossible (45). D'ailleurs si un plan mené par le point C perpendiculairement à AB passait par le point I, il serait nécessairement confondu avec le plan Q (212).

215. Théorème. — *Par un point pris dans un plan on peut mener une perpendiculaire à ce plan et on n'en peut mener qu'une.*

Par le point A, situé dans le plan donné P, menons en effet deux droites AB et AC perpendiculaires entre elles et les plans Q et R respectivement perpendiculaires à ces deux droites :

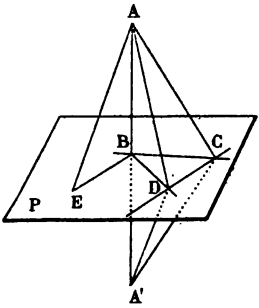
point A. Ces deux plans se coupent suivant une droite AD qui est perpendiculaire à AB et à AC, parce que ces deux droites sont perpendiculaires respectivement aux plans Q et R ; donc AD est perpendiculaire au plan P, et il existe une droite perpendiculaire au plan P au point A.



Il n'en existe qu'une, car s'il en existait une autre, AE, le plan Q_1 des deux droites AE, AD couperait le plan P suivant une droite AF qui serait perpendiculaire à la fois à AD et à AE. Il existerait donc deux droites AD, AE situées dans le plan Q_1 et perpendiculaires à AF au point A, ce qui est impossible (15).

216. Théorème. — *Par un point non situé dans un plan on peut mener une perpendiculaire à ce plan et on n'en peut mener qu'une.*

Soient P et A le plan et le point donnés. Dans le plan P menons une droite quelconque CD et appelons Q le plan perpendiculaire à CD mené par A. Soient BC l'intersection des deux plans P et Q, et AB la perpendiculaire à BC menée par le point A dans le plan Q. Nous allons montrer que AB est perpendiculaire au plan P. Pour cela, nous allons faire voir qu'elle est perpendiculaire à une autre droite, BD, menée par le point B dans le plan P. A cet effet, prenons



$$BA' = BA$$

et joignons les points D et C aux points A et A'. Les deux droites CA et CA' sont évidemment dans le plan Q, puisque celui-ci passe par A, par B et par C ; et comme CD est perpendiculaire au plan Q, les deux triangles DCA, DCA' sont rectangles en C. Ces deux triangles rectangles ont le côté CD commun ; de plus $CA = CA'$, parce que la droite CB est perpendiculaire sur le milieu de la base AA' du triangle CAA'. Il en résulte que les deux triangles rectangles sont égaux et, par suite, que $DA = DA'$. Mais alors le triangle

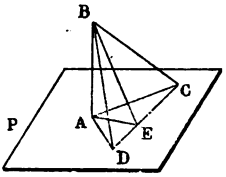
ADA' est isocèle, et comme B est le milieu de AA', la droite BD est perpendiculaire à AA' ; donc AB étant perpendiculaire à BC et à BD, sera perpendiculaire au plan P.

Ainsi on peut, du point A, mener une perpendiculaire au plan P.

On n'en peut mener qu'une, car si on pouvait en mener une autre, AE, dans le plan ABE on pourrait mener du point A deux perpendiculaires à l'intersection BE de ce plan et du plan P, ce qui est impossible (45).

217. Théorème des trois perpendiculaires. — *Si du pied* A *de la perpendiculaire* AB *au plan* P *on abaisse la perpendiculaire* AE *sur une droite quelconque* CD *du plan* P, *la droite* BE *qui joint le point* E *à un point quelconque* B *de la perpendiculaire* AB *est perpendiculaire à* CD.

Portons en effet sur la droite CD, de part et d'autre du point E, deux longueurs égales, EC, ED, et joignons les points C et D aux points A et B. Le triangle ACD est isocèle, puisque AE est perpendiculaire à CD en son milieu ; donc AD = AC. Mais alors les deux triangles BAD et BAC, qui sont rectangles en A, sont égaux. Il en résulte que BD = BC et que le triangle BDC est isocèle. Or, la droite BE joint le point B au milieu de la base, donc elle est perpendiculaire à cette base. C.Q.F.D.

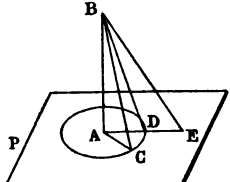


218. Théorème. — *Si d'un point pris hors d'un plan on mène la perpendiculaire et des obliques à ce plan :*

1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;*

2° *Deux obliques également éloignées du pied de la perpendiculaire sont égales ;*

3° *Deux obliques inégalement éloignées du pied de la perpendiculaire sont inégales ; celle qui s'en écarte le plus est la plus grande.*



1° Soient BA et BC la perpendiculaire et une oblique à un plan P. Le plan Q de ces deux droites coupe le plan P suivant la droite AC perpendiculaire à AB, de sorte que le triangle BAC est un triangle rectangle dont BC est l'hypoténuse; donc BC > BA.

2° Considérons deux obliques BD et BC telles que AD=AC. Les deux triangles rectangles BAD, BAC sont égaux ; donc BD = BC.

3° Considérons maintenant deux obliques BC et BE telles que l'on ait AE > AC. Si, sur AE, nous prenons AD = AC, nous venons de voir (2°) que BD = BC ; il suffit donc de prouver que BE > BD. Or, ceci résulte de ce que BD et BE sont situées dans le plan BAE et s'écartent inégalement du point A pied de la perpendiculaire à AE menée par le point B dans le plan BAE.

219. **Remarque.** — Les réciproques de ces propositions sont vraies et se démontrent par l'absurde. On en conclut, en particulier, que si du point B on mène des obliques égales au plan P, le lieu des pieds de ces obliques sur le plan P est une circonférence qui a pour centre le point A, pied de la perpendiculaire menée du point B sur le plan P.

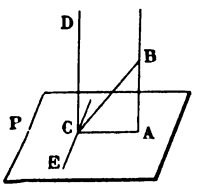
220. **Distance d'un point à un plan.** — On appelle *distance* d'un point B à un plan P, la longueur BA de la perpendiculaire menée du point B sur le plan P. C'est la plus courte de toutes les droites qui vont du point B à un point quelconque du plan P.

Parallélisme des droites et des plans.

221. **Définitions.** — On dit qu'une droite et un plan sont *parallèles* quand ils ne se coupent pas, à quelque distance qu'on les suppose prolongés tous les deux.

On dit que deux plans sont *parallèles* quand ils ne se coupent pas, à quelque distance qu'on les prolonge tous les deux.

222. **Théorème.** — *Deux droites perpendiculaires au même plan sont parallèles.*



Soient AB et CD deux droites perpendiculaires au même plan P. Pour prouver qu'elles sont parallèles, il faut prouver : 1° qu'elles sont dans le même plan ; 2° qu'elles ne se coupent pas.

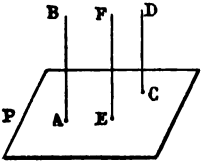
Il est clair, d'abord, qu'elles ne se coupent pas ; car si elles se coupaient, par leur point d'intersection on pourrait mener deux perpendiculaires au même plan, ce qui est impos-

sible. Il reste donc à prouver qu'elles sont dans le même plan.

Pour cela, joignons A à C et menons CE perpendiculaire à AC dans le plan P. Comme CE est aussi perpendiculaire à CD, elle est perpendiculaire au plan ACD ; le plan ACD est donc le lieu des perpendiculaires à CE au point C (213). Or, si l'on joint le point C à un point quelconque B de AB, la droite CB est l'une de ces perpendiculaires, en vertu du théorème des trois perpendiculaires ; donc le plan ACR contient CB et par suite contient aussi AB ; donc AB et CD sont dans le même plan.

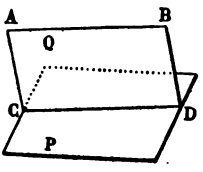
223. Théorème. — *Réciproquement, si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est aussi perpendiculaire à l'autre.*

Soient, en effet, AB et CD (même figure) deux droites parallèles et P un plan perpendiculaire à AB. Si, par un point quelconque de CD, on mène la perpendiculaire au plan P, cette perpendiculaire sera parallèle à AB (222) ; elle sera, par conséquent, confondue avec CD, puisque par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite. Donc le plan P est aussi perpendiculaire à CD.



224. Théorème. — *Lorsque deux droites sont parallèles à une troisième, elles sont parallèles entre elles.*

Soient, en effet, AB et CD deux droites parallèles à EF. Si l'on mène un plan P perpendiculaire à EF, ce plan, d'après ce qu'on vient de voir, est perpendiculaire à AB et à CD ; donc AB et CD sont parallèles (222).



225. Théorème. — *Lorsqu'une droite* AB *non située dans un plan* P *est parallèle à une droite* CD *de ce plan, elle est parallèle au plan.*

Les deux droites AB et CD étant parallèles, sont situées dans le même plan ; soit Q ce plan, qui coupe évidemment le plan P suivant la droite CD. Tous les points de AB étant situés dans le plan Q, si AB rencontrait le plan P elle ne pourrait le rencontrer qu'en un point de l'intersection

des deux plans P et Q, c'est-à-dire en un point de CD. Or, ceci est impossible, puisque AB et CD sont parallèles ; donc AB est parallèle au plan P.

226. **Théorème.** — *Lorqu'une droite* AB (*même fig.*) *est parallèle à un plan* P, *tout plan mené par* AB *coupe le plan* P *suivant une droite* CD *parallèle à* AB.

En effet : 1° les droites AB et CD sont dans le même plan ; 2° elles ne se rencontrent pas, parce que si elles se rencontraient, AB rencontrerait le plan P et ne lui serait pas parallèle, contrairement à l'hypothèse ; donc AB est parallèle à CD.

227. **Théorème.** — *Lorsqu'une droite* AB (*même fig.*) *est parallèle à un plan* P, *si par un point* C *du plan* P *on mène la parallèle à* AB, *la droite* CD *ainsi obtenue est située dans le plan* P.

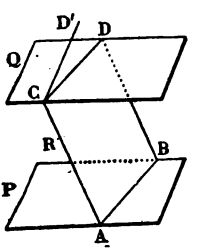
En effet, le plan ABC coupe le plan P suivant une parallèle à AB qui ne peut être que CD, puisque par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.

228. **Corollaire.** — *Lorsqu'une droite est parallèle à deux plans qui se coupent, elle est parallèle à leur intersection.*

Car si par un point quelconque de l'intersection on mène la parallèle à la droite, elle doit être à la fois dans les deux plans, c'est-à-dire à leur intersection ; donc celle-ci est parallèle à la droite donnée.

229. **Théorème.** — *Si on coupe deux plans parallèles par un troisième, les deux droites d'intersection ainsi obtenues sont parallèles.*

En effet : 1° elles sont dans le même plan ; 2° elles ne se rencontrent pas, parce que si elles se rencontraient les deux plans se rencontreraient aussi, ce qui est contraire à l'hypothèse, puisqu'ils sont parallèles.



230. **Corollaire.** — *Lorsque deux plans sont parallèles, si par un point de l'un on mène une droite parallèle à l'autre, la droite ainsi obtenue est située dans le premier.*

Soient P et Q deux plans parallèles et soit CD' une droite parallèle au plan P mené par un point C du plan Q. Coupons les deux plans P et Q par un troisième plan R et soient AB et CD les droites suivant lesquelles P et

Q sont coupés par R. On voit alors : 1° que AB est parallèle à CD' (226); 2° que AB est parallèle à CD. Il en résulte que CD et CD' coïncident, et, par suite, que CD' est située dans le plan Q.

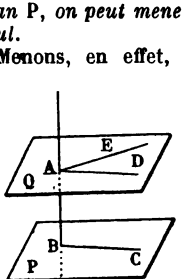
231. Théorème. — Lorsque deux plans sont perpendiculaires à la même droite, ils sont parallèles.

En effet, s'ils se rencontraient, on pourrait, par un point de l'intersection, mener deux plans perpendiculaires à la même droite, ce qui est impossible (214).

232. Remarque. — Ce théorème prouve qu'il existe des plans parallèles.

233. Théorème. — *Par un point* A *non situé dans le plan* P, *on peut mener un plan* Q *parallèle au plan* P *et un seul.*

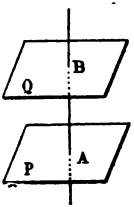
Menons, en effet, AB perpendiculaire au plan P et le plan Q perpendiculaire à AB au point A. Les deux plans P et Q, perpendiculaires à la même droite, sont parallèles ; donc on peut en mener un.



Supposons qu'on en puisse mener un autre, Q', et coupons P, Q et Q' par un plan quelconque passant par AB. Soient BC, AD, AE les droites d'intersection respectivement obtenues. Ces trois droites étant parallèles (229), AE coïncide avec AD; il en résulte que tout plan passant par AB coupe Q et Q' suivant la même droite ; donc Q' coïncide avec Q et il n'y a qu'un seul plan mené par le point A parallèlement au plan P.

234. Théorème. — *Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est aussi perpendiculaire à l'autre.*

Soit, en effet, AB une droite perpendiculaire à un plan P, que l'on suppose parallèle à un autre plan Q, et soit A le pied de cette perpendiculaire sur le plan P. La droite AB rencontre le plan Q, car si elle ne le rencontrait pas elle lui serait parallèle et serait située dans le plan P

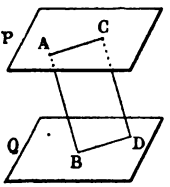


(227), ce qui n'est pas possible, puisqu'elle est perpendiculaire à ce plan. Appelons alors B le point de rencontre de AB avec le plan Q, et, par le point B, menons le plan Q' perpendiculaire à AB. Les deux plans P et Q' sont parallèles, comme P et Q ; donc Q' coïncide avec Q ; donc AB, perpendiculaire au plan P, est aussi perpendiculaire au plan Q.

235. Corollaire. — *Lorsque deux plans sont parallèles à un troisième, ils sont parallèles entre eux.*

Appelons, en effet, P et Q deux plans parallèles à un troisième, R. Si nous menons une perpendiculaire au plan R, la droite ainsi obtenue est perpendiculaire aux deux plans P et Q : donc ces deux plans sont parallèles (231).

236. Théorème. — *Des portions de droites parallèles comprises entre des plans parallèles sont égales.*



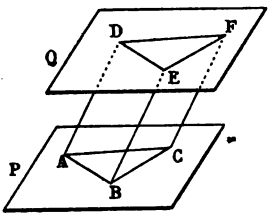
Soient AB et CD deux portions de droites parallèles comprises entre deux plans parallèles P et Q. Appelons R le plan de ces deux droites et coupons les plans P et Q par le plan R ; soient AC et BD les deux droites d'intersection obtenues. La figure ABDC est un parallélogramme, puisque AC est parallèle à BD (229) et que AB est parallèle à CD. On a donc bien AB = CD.

237. Remarque. — En particulier, si AB et CD sont perpendiculaires au plan P, elles sont parallèles (222) ; de plus elles sont perpendiculaires au plan Q ; donc *deux plans parallèles sont partout équidistants.*

238. Théorème. — *Lorsque deux angles, dans l'espace, ont leurs côtés parallèles et de même sens, ils sont égaux et leurs plans sont parallèles.*

Soient ABC, DEF les deux angles. Prenons AB = DE et BC = EF, puis menons les droites DA, EB et FC. Les figures EBAD, EBCF sont des parallélogrammes (77) ; on a donc BE = AD = CF. D'autre part, les deux droites AD et CF étant

parallèles à BE sont parallèles entre elles et la figure ADFC est aussi un parallélogramme ; il en résulte que AC est égal à DF. Mais alors les deux triangles ABC et DEF ont les trois côtés égaux, chacun à chacun ; donc les angles ABC et DEF sont égaux.



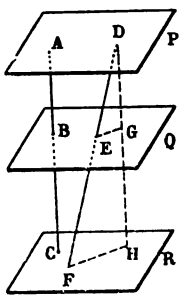
Il reste à prouver que les plans de ces angles sont parallèles. Pour cela, appelons P et Q ces deux plans respectifs, et imaginons que l'on mène par le point E le plan Q' parallèle au plan P. Ce plan Q' devant contenir ED et EF (230), coïncide avec le plan Q ; donc les deux plans P et Q sont parallèles.

239. Remarque. — Les angles seraient encore égaux si les côtés étaient parallèles et de sens contraires. Si deux côtés étaient parallèles et de même sens, les deux autres parallèles et de sens contraires, les angles seraient supplémentaires. Dans tous les cas les plans des deux angles sont parallèles.

240. Théorème. — *Trois plans parallèles déterminent sur deux droites quelconques deux segments proportionnels.*

Soient P, Q, R trois plans parallèles rencontrant les deux droites données aux points A, B, C, D, E, F ; il s'agit de prouver que l'on a

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$



Pour cela, menons par le point D la parallèle DGH à ABC, et soient G et H les points où elle rencontre Q et R respectivement. Le plan FDH coupe les deux plans parallèles Q et R suivant les droites EG et FH, qui sont parallèles (229) ; donc, en vertu d'un théorème du troisième livre (132), on a

$$\frac{DE}{EF} = \frac{DG}{GH};$$

mais DG et GH sont respectivement égales à AB et à BC

(236) ; en remplaçant, il vient

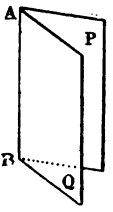
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF},$$

ce qui démontre la proposition.

Angles dièdres.

241. Définitions. — On appelle *angle dièdre* ou tout simplement *dièdre*, la figure formée par deux plans qui se coupent et qui sont limités à leur intersection. Les deux plans et leur intersection s'appellent respectivement les *faces* et l'*arête* du dièdre.

Si un dièdre est formé par les deux plans P et Q qui se coupent suivant la droite AB, on désigne ce dièdre au moyen des quatre lettres P, Q, A, B, en ayant soin de placer au milieu les lettres qui sont sur l'arête ; on dit, par conséquent, le dièdre PABQ. Toutefois, quand il n'y a pas d'ambiguïté possible, on dit tout simplement le dièdre AB.



On dit que deux dièdres sont *égaux* quand ils sont superposables.

On dit que deux dièdres sont *adjacents* quand ils ont la même arête, une face commune et que les plans des autres faces sont de part et d'autre de la face commune.

On fait la *somme* de deux dièdres en les plaçant de façon qu'il soient adjacents, et l'on appelle alors *somme* de ces deux dièdres, le dièdre formé par les faces extérieures. La définition de la somme s'étend facilement à plusieurs dièdres.

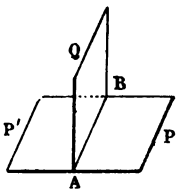
On définit un dièdre *plus grand* ou *plus petit* qu'un autre comme on a défini un angle plus grand ou plus petit qu'un autre (13).

On dit que deux dièdres sont *opposés par l'arête* quand les faces de l'un sont les prolongements des faces de l'autre.

On peut engendrer un dièdre PABQ en supposant qu'un plan mobile, d'abord confondu avec P, tourne autour de AB jusqu'à ce qu'il vienne coïncider avec le plan Q.

On dit qu'un plan Q est *perpendiculaire* au plan P lorsqu'il forme avec le plan P deux dièdres adjacents égaux PABQ,

P'ABQ. Ces angles dièdres égaux s'appellent alors des angles dièdres *droits*.



On dit qu'un dièdre est *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est inférieur ou supérieur à un dièdre droit. Par un raisonnement analogue à celui qui a été fait en géométrie plane (15 et 16) on démontre d'ailleurs :

1° *Que par une droite* AB *située dans un plan* P *on peut mener un plan* Q *perpendiculaire au plan* P *et on n'en peut mener qu'un ;*

2° *Que tous les dièdres droits sont égaux.*

On dit que deux dièdres sont *complémentaires* ou *supplémentaires* quand leur somme est égale à 1 ou à 2 dièdres droits.

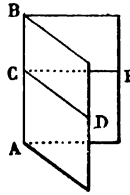
242. Théorèmes. — 1° *Tout plan qui en rencontre un autre forme avec lui deux dièdres adjacents supplémentaires, et réciproquement.*

2° *La somme des dièdres formés autour d'une droite est égale à 4 dièdres droits.*

3° *Deux dièdres opposés par l'arête sont égaux.*

Les démonstrations de ces théorèmes sont analogues à celles qui ont été données en géométrie plane n^{os} 18, 22 et 23.

243. Angle plan d'un dièdre. — Considérons un dièdre AB et, par un point C pris sur l'arête AB de ce dièdre, menons CD et CE perpendiculaires à AB et situées respectivement dans les plans des faces. Nous obtenons ainsi un angle plan DCE qui demeure invariable quand le point C se déplace sur l'arête AB ; en effet, ses côtés se déplacent parallèlement à eux-mêmes en conservant leurs sens respectifs. Pour cette raison, cet angle s'appelle l'*angle plan* ou le *rectiligne* correspondant au dièdre AB.



Il est clair que le plan DCE de cet angle est perpendiculaire à AB (210) ; il en résulte qu'on peut obtenir l'angle plan d'un dièdre en coupant les faces de ce dièdre par un plan quelconque perpendiculaire à l'arête.

244. Théorème. — *A deux dièdres égaux correspondent des angles plans égaux, et réciproquement.*

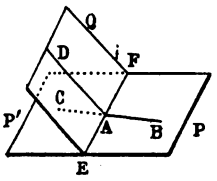
La proposition directe se démontre en superposant les

dièdres de manière à faire coïncider les sommets des deux angles plans ; alors ceux-ci coïncident eux-mêmes.

On démontre de même la réciproque en superposant les angles plans. L'arête du premier dièdre coïncide alors avec l'arête du second, puisqu'elles sont toutes deux perpendiculaires au plan du rectiligne au même point.

245. Théorème. — *A deux dièdres supplémentaires correspondent deux angles plans supplémentaires.*

Considérons, en effet, deux dièdres adjacents supplémentaires formés par les deux plans P et Q. Coupons ces deux plans par un troisième perpendiculaire à leur intersection EF ; nous obtenons ainsi deux droites BAC et AD perpendiculaires à EF, et les angles BAD, DAC sont les angles plans correspondant respectivement aux dièdres PEFQ, P'EFQ. Or, il est manifeste que BAD et DAC sont supplémentaires.



Si les deux dièdres adjacents sont égaux, les angles plans sont égaux, et réciproquement ; donc :

246. Corollaire. — *A un dièdre droit correspond un angle plan droit, et réciproquement.*

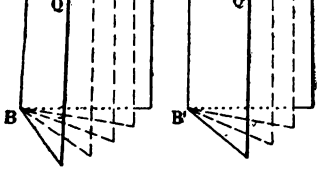
247. Théorème. — *Le rapport de deux angles dièdres est égal au rapport des angles plans correspondants.*

Considérons, en effet, deux dièdres PABQ, P'A'B'Q' dont les angles plans respectifs sont PAQ et P'A'Q'. Supposons que les deux dièdres aient une commune mesure contenue, par exemple, 4 fois dans le premier et 3 fois dans le second, de sorte que l'on a

$$\frac{\text{PABQ}}{\text{P'A'B'Q'}} = \frac{4}{3} ;$$

il s'agit alors de prouver que l'on a aussi

$$\frac{\text{PAQ}}{\text{P'A'Q'}} = \frac{4}{3} .$$



Pour cela, partageons le premier dièdre en 4 dièdres égaux par des plans passant par AB, et le second dièdre en 3 dièdres égaux par des plans passant par A'B'.

Comme à des dièdres égaux correspondent des angles plans égaux, les plans menés par AB partagent l'angle PAQ en 4 parties égales, et les plans menés par A'B' partagent l'angle P'A'Q' en 3 parties égales. Mais chaque partie de PAQ est égale à une partie de P'A'Q', parce que les dièdres partiels du premier sont égaux aux dièdres partiels du second. Il en résulte qu'un même angle plan est contenu 4 fois dans PAQ et 3 fois dans P'A'Q' ; donc

$$\frac{\text{PAQ}}{\text{P'A'Q'}} = \frac{4}{3} ;$$

donc enfin

$$\frac{\text{PABQ}}{\text{P'A'B'Q'}} = \frac{\text{PAQ}}{\text{P'A'Q'}}.$$

248. Corollaire. — *Un angle dièdre a la même mesure que son angle plan, pourvu que l'unité de dièdre soit le dièdre dont l'angle plan est égal à l'unité d'angle.*

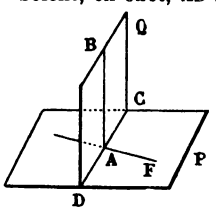
En effet, si dans l'égalité précédente, P'A'B'Q' et P'A'Q' sont : le premier, l'unité de dièdre, et le second, l'unité d'angle, le premier rapport représente la mesure du dièdre PABQ et le second la mesure de l'angle plan correspondant, PAQ. La proposition est ainsi démontrée.

D'après cela, un angle dièdre de 28° 30' 43" sera un angle dont l'angle plan correspondant est égal à 28° 30' 43".

Plans perpendiculaires.

249. Théorème.— *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan* P, *tout plan mené par la droite est perpendiculaire au plan* P.

Soient, en effet, AB la droite perpendiculaire au plan P, et Q un plan quelconque passant par AB. Par un point quelconque, A, de l'intersection CD de P et de Q, menons AF perpendiculaire à CD dans le plan P. L'angle BAF de cette perpendiculaire avec AB est alors, par définition, l'angle plan du dièdre PCDQ. Or, AB étant perpendiculaire au plan P, l'angle BAF est droit ; donc le dièdre lui-



même est droit (246) et les deux plans P et Q sont perpendiculaires.

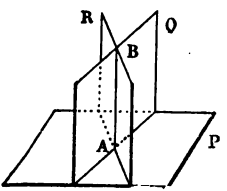
250. Théorème. — *Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite menée dans l'un perpendiculairement à leur intersection est perpendiculaire à l'autre.*

Soient, en effet, P et Q (même figure) deux plans perpendiculaires. Menons dans le plan Q une droite quelconque AB perpendiculaire à l'intersection CD des deux plans, puis, par le pied A de cette perpendiculaire, menons AF perpendiculaire à CD dans le plan P. L'angle BAF ainsi obtenu est l'angle plan du dièdre PCDQ ; or, ce dièdre est droit, donc l'angle BAF est droit. Mais alors AB étant perpendiculaire à CD et à AF est perpendiculaire au plan P, ce qui démontre la proposition.

251. Théorème. — *Lorsque deux plans sont perpendiculaires, si d'un point de l'un on mène la perpendiculaire à l'autre, cette droite est tout entière dans le premier.*

Conservons encore la même figure, et supposons que par le point B, pris sur Q, on mène la perpendiculaire au plan P perpendiculaire lui-même au plan Q par hypothèse ; puis, menons BA perpendiculaire à l'intersection CD des deux plans P et Q. Cette droite est alors perpendiculaire au plan P (250) ; mais par le point B on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan P ; donc BA coïncide avec cette perpendiculaire ; donc celle-ci est située dans le plan Q, ce qui démontre la proposition.

252. Théorème. — *Si deux plans* Q *et* R *sont perpendiculaires à un troisième* P *et se coupent suivant la droite* AB, *cette droite* AB *est perpendiculaire au plan* P.



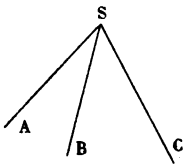
Menons, en effet, par un point de AB la perpendiculaire au plan P ; la droite ainsi obtenue étant alors située dans le plan Q et dans le plan R (251) est confondue avec AB ; donc AB est perpendiculaire au plan P.

Angles polyèdres.

253. Définitions. — On appelle *angle trièdre* ou tout

simplement *trièdre* la figure formée par trois plans qui se coupent au même point et qui sont limités à leurs droites d'intersection. Ces droites s'appellent les *arêtes* de l'angle trièdre, et le point commun aux trois plans est appelé *sommet*. On appelle *faces* du trièdre les angles formés par les arêtes deux à deux ; et enfin, on appelle *dièdres* du trièdre les angles dièdres formés par les plans des faces deux à deux.

On peut encore considérer un angle trièdre comme défini par trois droites issues du même point et non situées dans le même plan.

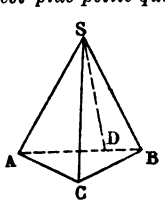


On désigne un angle trièdre par quatre lettres placées respectivement au sommet et sur les arêtes : On dira, par exemple, le trièdre SABC. Quand il n'y a pas d'ambiguïté possible, on le désigne simplement par la lettre qui est au sommet.

On appelle *angle polyèdre* la figure formée par plusieurs plans qui se coupent au même point et qui sont limités à leurs intersections deux à deux. Ces plans sont les *faces* du polyèdre, et leur point de rencontre est le *sommet*. Les droites d'intersection des faces sont les *arêtes*, et les angles dièdres formés par les faces deux à deux sont les *dièdres* de l'angle polyèdre. On appelle encore *faces* du polyèdre les angles formés par les arêtes deux à deux, et les plans déterminés par ces arêtes deux à deux s'appellent alors les *plans des faces* pour éviter toute ambiguïté.

On désigne un angle polyèdre par plusieurs lettres placées respectivement au sommet et sur les arêtes.

254. Théorème. — *Dans tout trièdre une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres.*



Faisons la démonstration pour la plus grande face ASB du trièdre SABC. Pour cela, dans le plan ASB, menons une droite SD faisant avec SA un angle égal à l'angle ASC ; comme ASB est la plus grande face, SD sera intérieure à l'angle ASB. Prenons maintenant SC = SD, et coupons le trièdre par un plan quelconque passant par les deux points D et C ainsi obtenus. Nous formons ainsi un triangle ABC dans

lequel on a

$$AD + DB < AC + CB.$$

Mais les deux triangles ASD, ASC sont évidemment égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun ; il en résulte que $AD = AC$ et que l'inégalité précédente peut s'écrire

$$DB < CB.$$

Cela posé, il s'agit de prouver que l'on a

$$ASD + DSB < ASC + CSB,$$

ou

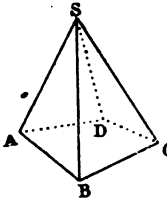
$$DSB < CSB,$$

puisque ASD est égal à ASC. Or, les deux triangles CSB, DSB ont deux côtés égaux chacun à chacun et le troisième côté DB du second est inférieur au troisième côté CB du premier. Il en résulte (44) que l'angle DSB est inférieur à l'angle CSB et, par suite, que l'angle ASB est inférieur à la somme ASC + CSB.

255. Remarque. — En raisonnant comme pour les triangles (40), on déduit de là que *dans tout trièdre une face quelconque est plus grande que la différence des deux autres.*

256. Théorème. — *La somme des faces d'un angle polyèdre convexe est inférieure à 4 droits.*

On dit qu'un angle polyèdre est *convexe* quand il est situé tout entier d'un même côté par rapport au plan de l'une des faces prolongé indéfiniment.



Cela posé, considérons, par exemple, un angle polyèdre à quatre faces SABCD, et coupons-le par un plan quelconque rencontrant toutes les arêtes du même côté du sommet, de sorte que nous obtenons ainsi un polygone convexe ABCD. Chaque sommet de ce polygone convexe peut être considéré comme le sommet d'un angle trièdre. Appliquons alors le théorème précédent à tous ces trièdres et nous aurons les inégalités

$$ABC < ABS + SBC,$$
$$BCD < BCS + SCD,$$
$$CDA < CDS + SDA,$$
$$DAB < DAS + SAB.$$

Ajoutons maintenant toutes ces inégalités membre à membre et observons : 1° que, dans le premier membre, nous avons la somme des angles à la base du polygone convexe ABCD,

c'est-à-dire $(2n - 4)$ droits (71), en appelant n le nombre des faces du polyèdre; 2° que, dans le second membre, nous avons la somme des angles à la base des n triangles SAB, SBC, SCD, SDA. Or, si l'on appelle S la somme des faces de l'angle polyèdre, la somme des angles de tous ces triangles, somme qui vaut $2n$ droits, puisqu'elle vaut 2 dr. pour chaque triangle, est égale à S augmentée de la somme des angles à la base; donc, celle-ci est égale à $(2n - S)$ dr. Il en résulte que l'inégalité obtenue peut s'écrire

$$(2n - 4) \text{ dr.} < (2n - S) \text{ dr.}$$

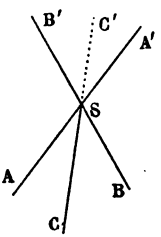
ou $$S < 4 \text{ droits.}$$ C. Q. F. D.

257. Remarque. — Cette propriété étant applicable aux trièdres, qui sont des angles polyèdres convexes, à la propriété des trièdres énoncés plus haut, on peut joindre la suivante :

La somme des faces d'un angle trièdre est plus petite que 4 droits.

258. Trièdres symétriques. — Si l'on prolonge les arêtes d'un trièdre SABC au delà du sommet, on forme un second trièdre SA'B'C' appelé *trièdre symétrique* du premier.

Deux trièdres symétriques ont leurs faces respectivement égales comme angles opposés par le sommet, et leurs dièdres respectivement égaux comme opposés par l'arête; ils ont donc leurs éléments égaux, chacun à chacun. Cependant ils ne sont pas superposables parce que les éléments égaux ne présentent pas *la même disposition* dans les deux trièdres.



En effet, imaginons un premier observateur couché sur SA, la tête en S, les pieds en A et regardant la face opposée BSC; puis un second observateur couché sur l'arête SA' du second trièdre, la tête en S, les pieds en A' et regardant la face opposée B'SC'. Tandis que le premier observateur a l'arête SB à sa gauche et l'arête SC à sa droite, le second observateur a l'arête SB', qui correspond à SB, à sa droite et l'arête SC', qui correspond à SC, à sa gauche. C'est pour cette raison que l'on dit que les deux trièdres *ne présentent pas* la même disposition.

Il est clair d'ailleurs que ces deux trièdres ne sont pas superposables. En effet, si on suppose le second observateur

invariablement lié au second trièdre, et si on amène le dièdre SA' à coïncider avec le dièdre SA de manière à faire coïncider les deux observateurs, les autres éléments égaux dans les trièdres ne coïncideront pas, car, tandis que le dièdre SB est à la gauche de l'observateur, le dièdre égal, SB', est à sa droite.

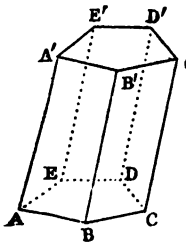
LIVRE VI : LES POLYÈDRES

Généralités sur les Polyèdres.

259. Polyèdres. — On appelle *polyèdre* un solide limité de toutes parts par des plans appelés les *faces* du polyèdre. Ces plans en se coupant deux à deux déterminent les *arêtes* du polyèdre et forment les *angles dièdres* de ce polyèdre. Les arêtes situées dans le même plan forment un polygone; ce polygone et les polygones analogues sont ce que nous avons appelé les faces. On appelle *sommets* du polyèdre les sommets des faces de ce polyèdre.

On dit qu'un polyèdre est *convexe* quand il est tout entier du même côté par rapport au plan de l'une quelconque de ses faces prolongé indéfiniment.

260. Prismes. — On appelle *prisme* un polyèdre qui a deux faces formées par deux polygones égaux et parallèles, appelées *bases* du prisme, et dont les autres faces, appelées *faces latérales*, sont des parallélogrammes.



Pour former un prisme, on mène des parallèles à une même droite par les sommets A, B, C, D, E d'un polygone plan et, sur les droites ainsi obtenues, on porte des longueurs égales AA', BB', etc. Les points A', B', C',... ainsi obtenus sont alors dans le même plan, qui est le plan mené par l'un d'eux parallèlement au plan ABCDE. En effet, les figures ABA'B', BCB'C', etc. sont des parallélogrammes; il en résulte que l'angle A'B'C' est égal à l'angle ABC et que le plan A'B'C' est parallèle au plan ABC (238), de sorte que les points B' et C'

sont dans le plan mené par A' parallèlement à ABC. On voit alors, de proche en proche, que les autres sommets sont situés dans ce même plan.

Si nous ajoutons que les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E' sont égaux comme ayant leurs éléments égaux, chacun à chacun, nous voyons que nous avons bien formé un prisme.

Dans ce prisme, les droites AA',·BB',... s'appellent les arêtes *latérales*, et l'on dit qu'un prisme est *droit* ou *oblique* suivant que les arêtes latérales sont perpendiculaires ou obliques aux plans des bases. Les faces latérales d'un prisme droit sont évidemment des rectangles.

On appelle *hauteur* d'un prisme quelconque la distance des deux bases.

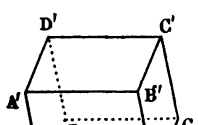
261. Parallélépipèdes. — On appelle *parallélépipède* un prisme dont les bases sont des parallélogrammes. Un parallélépipède a six faces qui sont des parallélogrammes.

Lorsque les arêtes latérales sont perpendiculaires aux bases, le parallélépipède est *droit ;* si de plus les bases sont des rectangles, le parallélépipède est *rectangle*. Les six faces d'un parallélépipède rectangle sont des rectangles.

Un cube est un parallélépipède rectangle dont les six faces sont des carrés.

262. Théorème. — *Dans un parallélépipède, deux faces opposées quelconques sont des parallélogrammes égaux et parallèles.*

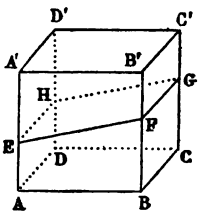
Soient ABCD, A'B'C'D' les bases d'un parallélépipède. Prouvons, par exemple, que les deux parallélogrammes ADA'D' et BCB'C' sont égaux et parallèles. Observons, pour cela, d'abord, que AA' et BB' sont égales et parallèles, et que BC et AD sont égales et parallèles comme arêtes opposées de parallélogrammes; observons ensuite que les angles A'AD et B'BC ont leurs côtés parallèles et de même sens et, par suite, qu'ils sont égaux et que leurs plans sont parallèles. Il en résulte alors que les deux parallélogrammes considérés ont leurs éléments égaux, chacun à chacun, et sont égaux ; d'ailleurs nous venons de



dire que leurs plans sont parallèles, puisque ces plans sont précisément ceux des angles A'AD et B'BC.

Il suit de là que l'on peut prendre pour bases d'un parallélépipède deux faces opposées quelconques.

263. Théorème. — *Si on coupe les faces latérales d'un parallélépipède par un plan, la section obtenue est un parallélogramme.*

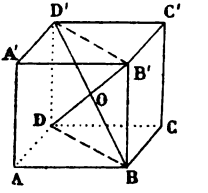


Soit, en effet, EFGH la section obtenue en coupant par un plan le parallélépipède ABCDA'B'C'D'. Les plans des faces ABA'B' et CDC'D' étant parallèles, les droites EF et GH sont parallèles (229) ; les droites EH et FG sont aussi parallèles pour la même raison ; donc le quadrilatère EFGH est un parallélogramme (74).

264. Théorème. — *Les diagonales d'un parallélépipède se coupent mutuellement en parties égales.*

On appelle *diagonales* d'un parallélépipède ABCDA'B'C'D' les lignes qui joignent deux sommets *opposés* tels que B et D'.

Cette définition étant donnée, considérons deux diagonales BD' et B'D et menons le plan des deux arêtes parallèles BB' et DD'. Ce plan coupe les bases suivant deux droites parallèles, BD et B'D' (229) ; il en résulte que la figure BDD'B' est un parallélogramme et que le point de rencontre, O, des diagonales considérées est le milieu de chacune d'elles.



On verrait de même que la diagonale BD' et une autre diagonale se coupent en leurs milieux, de sorte que le point O est le milieu des quatre diagonales.

Quand le parallélépipède est rectangle, la figure BDB'D' étant un rectangle, on voit que les *diagonales d'un parallélépipède rectangle sont égales.*

265. Théorème. — *Les sections faites dans un prisme par deux plans parallèles sont des polygones égaux.*

On constate, en effet, sans la moindre difficulté, que ces polygones ont leurs côtés égaux, chacun à chacun, comme côtés opposés de parallélogrammes, et leurs angles égaux, chacun à chacun, comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens.

266. Théorème. — *Deux prismes droits qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont superposables.*

En effet, si on transporte le second prisme sur le premier de manière à faire coïncider sa base avec celle du premier qui lui est égale, on constate facilement que les deux prismes coïncident.

Volume des prismes droits.

267. Définitions relatives aux volumes. — *Mesurer* un volume, c'est le comparer à un autre volume pris pour unité. On cherche, pour cela, combien de fois le volume à mesurer contient l'unité ou une partie de l'unité divisée en parties égales.

On obtient ainsi un nombre qui exprime la mesure du volume.

On prend pour unité de volume le volume du cube construit sur l'unité de longueur ; de cette façon la mesure de certains volumes se ramène, ainsi qu'on va le voir, à la mesure de certaines longueurs.

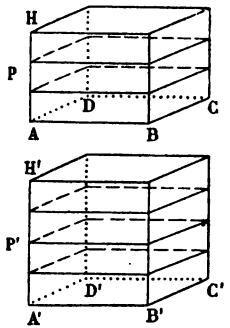
Quand l'unité de longueur est le mètre, l'unité de volume s'appelle le *mètre cube ;* quand l'unité de longueur est le décimètre ou le centimètre, l'unité de volume est le *décimètre cube* ou le *centimètre cube.*

On sait d'ailleurs qu'une unité de volume vaut mille unités de l'ordre immédiatement inférieur. Par exemple : le mètre cube vaut 1000 décimètres cubes ; le décimètre cube vaut 1000 centimètres cubes, etc.

On dit que deux solides sont *équivalents* quand ils ont le même volume sans être, pour cela, nécessairement superposables. Deux solides superposables sont nécessairement équivalents.

268. Théorème. — *Le rapport des volumes de deux parallélépipèdes rectangles qui ont des bases égales est égal au rapport des hauteurs.*

Observons d'abord que deux parallélépipèdes rectangles qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont superposables (266).



Cela posé, considérons deux parallélépipèdes rectangles de volumes P et P', de bases égales ABCD, A'B'C'D', et de hauteurs inégales AH et A'H'. Supposons que les hauteurs aient une commune mesure qui soit, par exemple, contenue 3 fois dans AH et 4 fois dans A'H', de sorte que $\frac{AH}{A'H'} = \frac{3}{4}$. Partageons AH et A'H' respectivement en 3 et en 4 parties égales, puis menons des plans parallèles aux bases par les points de division. Nous partageons ainsi le premier parallélépipède en 3 parallélépipèdes égaux, et le second en 4. D'ailleurs, les parallélépipèdes partiels du premier sont évidemment égaux aux parallélépipèdes partiels du second ; il en résulte qu'un même parallélépipède est contenu 3 fois dans P et 4 fois dans P'. On a donc

$$\frac{P}{P'} = \frac{3}{4},$$

et par suite

$$\frac{P}{P'} = \frac{AH}{A'H'}.$$

269. Remarque. — Dans un parallélépipède rectangle, toutes les arêtes sont deux à deux égales aux trois arêtes qui partent d'un même sommet. Les longueurs de ces trois arêtes s'appellent les *dimensions* du parallélépipède. L'une quelconque de ces dimensions peut être prise comme hauteur ; alors la base est le plan des deux autres dimensions.

En vertu de ces définitions, le théorème précédent peut encore s'énoncer ainsi :

Le rapport des volumes de deux parallélépipèdes rectangles qui ont deux dimensions communes est égal au rapport des troisièmes dimensions.

270. Théorème. — *Le rapport des volumes de deux parallélépipèdes rectangles qui ont la même hauteur est égal au rapport des bases.*

Soient P et P′ les volumes de deux parallélépipèdes rectangles de même hauteur h, et dont les bases respectives sont B et B′. Appelons a, b les dimensions de la base du premier, a', b' les dimensions de la base du second, puis imaginons que l'on ait construit un troisième parallélépipède rectangle P″ ayant pour dimensions a, b' et h. En vertu de la remarque précédente on a

$$\frac{P''}{P'} = \frac{a}{a'}$$

et

$$\frac{P}{P''} = \frac{b}{b'}.$$

On en déduit, en multipliant membre à membre,

$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'}.$$

Mais on a vu (184) que

$$\frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'} = \frac{B}{B'};$$

donc

$$\frac{P}{P'} = \frac{B}{B'}.$$

271. Théorème. — *Le rapport des volumes de deux parallélépipèdes rectangles quelconques est égal au produit du rapport des bases par le rapport des hauteurs.*

Soient, en effet, P et P′ les volumes de deux parallélépipèdes rectangles de bases respectives B, B′ et de hauteurs respectives h et h'. Comparons-les à un parallélépipède P″ de base B et de hauteur h'. En vertu du théorème n° 270, on a

$$\frac{P''}{P'} = \frac{B}{B'};$$

en vertu du théorème n° 268, on a aussi

$$\frac{P}{P''} = \frac{h}{h'}.$$

En multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\frac{P}{P'} = \frac{B}{B'} \times \frac{h}{h'}.$$

272. Théorème. — *Si l'on prend pour unités d'aire et de volume le carré et le cube construits sur l'unité de longueur, le volume du parallélépipède rectangle a pour mesure le pro-*

duit du nombre qui mesure sa base par le nombre qui mesure sa hauteur.

En effet, supposons que dans l'égalité

$$\frac{P}{P'} = \frac{B}{B'} \times \frac{h}{h'},$$

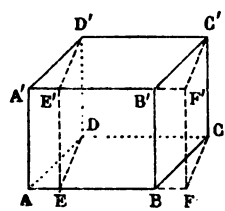
h', B' et P' soient les unités respectives de longueur, de surface et de volume. Alors $\frac{P}{P'}$ est le nombre qui mesure le volume du parallélépipède P, $\frac{B}{B'}$ le nombre qui mesure sa base, et $\frac{h}{h'}$ le nombre qui mesure sa hauteur. La proposition résulte évidemment de là.

273. Remarque. — On a vu en géométrie plane que l'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur, c'est-à-dire *au produit de ses deux dimensions.* Il en résulte que *le volume d'un parallélépipède rectangle est aussi égal au produit de ses trois dimensions.*

274. Théorème. — *Le volume d'un parallélépipède droit est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

On démontre cette proposition en prouvant qu'un parallélépipède droit est équivalent à un parallélépipède rectangle ayant une base équivalente à celle du parallélépipède droit et même hauteur que celui-ci.

Pour cela, sur la base ABCD du parallélépipède droit on construit un rectangle équivalent EFCD et, des points E, F ainsi obtenus, on mène les perpendiculaires EE', FF' aux bases jusqu'aux points de rencontre E' et F' avec la base supérieure. On obtient ainsi un parallélépipède rectangle EFCDE'F'C'D' qui a, avec le parallélépipède droit, une partie commune EBCDE'B'C'D'. Les parties non communes sont deux prismes triangulaires droits BFCB'F'C' AEDA'E'D' superposables ; en effet, si on transporte le second prisme sur le premier de manière à faire coïncider les deux triangles égaux BFC, AED, les deux prismes coïncident.

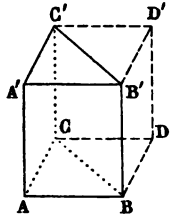


Il suit de là que les deux parallélépipèdes sont équivalents.

Or, le parallélépipède rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur ; d'autre part, la base du parallélépipède rectangle est équivalente à celle du parallélépipède droit, et les hauteurs sont égales. Donc le volume du parallélépipède droit est bien égal au produit de sa base par sa hauteur.

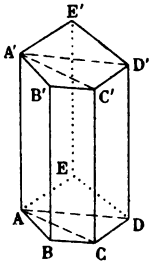
275. Théorème. — *Le volume d'un prisme droit est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

1° Considérons un prisme triangulaire droit ABCA'B'C'. Construisons le parallélogramme ABDC et, par le point D, menons la perpendiculaire aux bases jusqu'au point de rencontre D' avec la base supérieure du prisme. Nous formons ainsi un parallélépipède droit composé de deux prismes triangulaires droits superposables (266) ; il en résulte que le volume du prisme triangulaire ABCA'B'C' est la moitié du volume du parallélépipède droit. Mais l'expression de ce dernier volume est



$$ABCD \times AA';$$

donc l'expression du volume du prisme triangulaire droit est $\frac{ABCD}{2} \times AA'$. Or $\frac{ABCD}{2} = ABC$; donc enfin le volume du prisme triangulaire droit est égal au produit de sa base par sa hauteur.



2° Considérons maintenant un prisme droit quelconque et décomposons-le en prismes triangulaires ABCA'B'C', ACDA'C'D', ADEA'D'E'. Les volumes de ces prismes ont respectivement pour expressions

$$ABC \times AA', \qquad ACD \times AA', \qquad ADE \times AA'.$$

L'expression du volume du prisme considéré sera donc

$$(ABC + ACD + ADE) \times AA',$$

c'est-à-dire

$$ABCDE \times AA'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

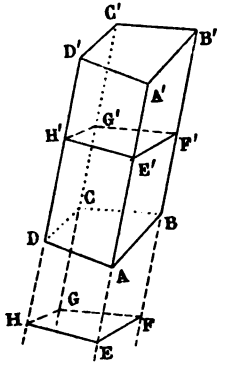
Volume des prismes obliques.

276. Définition. — On appelle *section droite* d'un prisme

oblique le polygone obtenu en coupant les faces latérales par un plan perpendiculaire aux arêtes latérales. Quand le prisme est droit, les sections droites sont des polygones égaux aux bases (265). En tous cas, toutes les sections droites sont des polygones égaux (265).

277. **Théorème.** — *Un prisme oblique est équivalent à un prisme droit qui aurait pour base la section droite et pour hauteur la longueur d'une arête latérale.*

Soit, en effet, le prisme oblique ABCDA'B'C'D'. Supposons les arêtes latérales prolongées, menons une section droite EFGH, et menons ensuite une autre section droite E'F'G'H' telle que A'E' = AE. Nous formons ainsi un prisme droit EFGHE'F'G'H' qui a pour base une section droite et pour hauteur EE' la longueur d'une arête latérale AA' ; car, si à AE' on ajoute les deux longueurs égales EA et E'A', on obtient deux longueurs égales EE' et AA'. La question se ramène donc à prouver que le prisme oblique considéré et le prisme droit ainsi obtenu, sont équivalents. Or, ces deux prismes ont en commun le solide ABCDE'F'G'H' ; il suffit donc de prouver que les parties non communes sont équivalentes.



Pour cela, faisons glisser la partie non commune supérieure le long des arêtes jusqu'à ce que le polygone E'F'G'H' vienne coïncider avec son égal EFGH. Comme les arêtes sont perpendiculaires aux bases, E'A', F'B' ... prennent respectivement les directions EA, FB, ...

Mais on a BB' = FF' ; par suite, en retranchant la partie commune BF', on a aussi F'B' = FB. On voit de même que G'C' = GC, etc. ; d'ailleurs E'A' = EA par construction ; donc les points A', B', C', D' viennent coïncider respectivement avec les points A, B, C, D. Les parties non communes sont donc superposables et par suite les deux prismes sont équivalents.

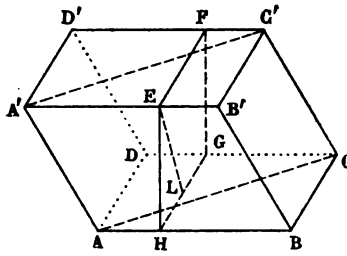
278. **Corollaire.** — *Le volume d'un prisme oblique est*

égal au produit de la section droite par la longueur d'une arête latérale.

Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème précédent.

279. Théorème.— *Le volume d'un parallélépipède oblique est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

Soit, en effet, ABCD la base d'un parallélépipède oblique ABCDA'B'C'D'. Considérons-le comme un prisme oblique dont les arêtes latérales sont parallèles à AB et menons une section droite EFGH. Le volume est alors égal (277 et 275) à



$$EFGH \times AB.$$

Mais si l'on mène du point E la perpendiculaire EL sur GH, cette perpendiculaire est perpendiculaire au plan ABCD, c'est-à-dire n'est autre chose que la hauteur du parallélépipède, et l'on a

$$EFGH = GH \times EL;$$

de sorte que le volume du parallélépipède est égal à

$$GH \times EL \times AB \quad \text{ou à} \quad AB \times GH \times EL.$$

Or, AB étant perpendiculaire au plan EFGH, est perpendiculaire à GH, ce qui signifie que GH est la hauteur du parallélogramme ABCD et, par suite, que $AB \times GH$ est la surface de ce parallélogramme.

De là, et de ce que EL est la hauteur, résulte évidemment la proposition.

280. Théorème. — *Le volume d'un prisme quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

1° Considérons d'abord un prisme triangulaire oblique ABCA'B'C' (même figure) et construisons le parallélépipède ABCDA'B'C'D' comme au n° 275 en menant par le point D la droite DD' parallèle aux arêtes latérales. Si l'on mène une section droite EFGH, on voit que ce parallélépipède est la somme de deux prismes triangulaires équivalents comme ayant des sections droites égales et des hauteurs égales (277).

Il en résulte que le volume du prisme triangulaire est la moitié du volume du parallélépipède. Mais celui-ci a pour mesure le produit de la base ABCD par la hauteur EL ; donc le volume du prisme est égal à $\frac{1}{2}$ ABCD $\times$ EL ou à ABC $\times$ EL.

2° Si nous supposons maintenant le prisme quelconque, nous le décomposerons en prismes triangulaires de même hauteur et nous raisonnerons comme au n° 275, 2°.

Généralités sur les pyramides.

281. Définitions. — Une *pyramide* est un polyèdre dont une face est un polygone plan appelé *base* de la pyramide et dont toutes les autres faces sont des triangles ayant un sommet commun et pour bases respectives les côtés de ce polygone. Ces triangles s'appellent les *faces latérales*, et leur sommet commun s'appelle le *sommet* de la pyramide.

On appelle *arêtes latérales* les lignes qui joignent le sommet de la pyramide aux sommets du polygone de base, et l'on appelle *hauteur* la longueur de la perpendiculaire menée du sommet sur le plan de la base.

On divise les pyramides en pyramides *triangulaires*, *quadrangulaires*, etc., suivant que la base est un triangle, un quadrilatère, etc. La pyramide triangulaire porte aussi le nom de *tétraèdre*.

On dit qu'une pyramide est *régulière* lorsque la base est un polygone régulier et que la hauteur de la pyramide a pour pied, sur la base, le centre de cette base. Les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles égaux et les arêtes latérales sont égales.

On appelle spécialement *tétraèdre régulier* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

On appelle *tronc de pyramide à bases parallèles*, le polyèdre compris entre la base d'une pyramide et la section faite dans cette pyramide par un plan parallèle à la base. Cette section s'appelle aussi une *base* du tronc de pyramide et l'on appelle *hauteur* du tronc de pyramide la distance des deux bases.

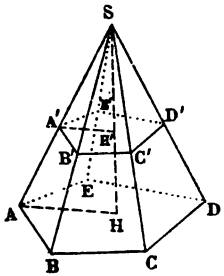
282. Théorème. — *Si l'on coupe une pyramide par un plan parallèle à la base :*

1° *Les arêtes latérales et la hauteur sont divisées en parties proportionnelles ;*

2° *La section est un polygone semblable à la base ;*

3° *Les aires de la section et de la base sont entre elles comme les carrés de leurs distances au sommet.*

1° Soit une pyramide SABCDE, de hauteur SH, coupée suivant le polygone A'B'C'D'E' par un plan parallèle à la base, et soit H' le point de rencontre de ce plan avec la hauteur. Les côtés du polygone A'B'C'D'E' étant parallèles aux côtés correspondants du polygone ABCDE, on a



$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC}, \text{ etc.}$$

D'autre part A'H' et AH étant parallèles, on a aussi

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SH'}{SH};$$

il en résulte

$$\frac{SH'}{SH} = \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC}, \text{ etc.}$$

2° Les polygones ABCDE, A'B'C'D'E' ont leurs angles égaux, chacun à chacun, comme ayant les côtés parallèles et de même sens ; d'ailleurs, en vertu de ce parallélisme, on a aussi

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB}; \qquad \frac{SB'}{SB} = \frac{B'C'}{BC}, \text{ etc.}$$

Donc, en vertu de 1°,

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}, \text{ etc.,}$$

et les polygones sont semblables comme ayant les angles égaux, chacun à chacun, et les côtés homologues proportionnels.

3° Les polygones étant semblables, on a (198)

$$\frac{\text{Aire A'B'C'D'E'}}{\text{Aire ABCDE}} = \frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2}.$$

Mais, en vertu de 2° et de 1°, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = \frac{SH'}{SH}$; donc

$$\frac{\text{Aire A'B'C'D'E'}}{\text{Aire ABCDE}} = \frac{\overline{SH'}^2}{\overline{SH}^2}.$$ C. Q. F. D.

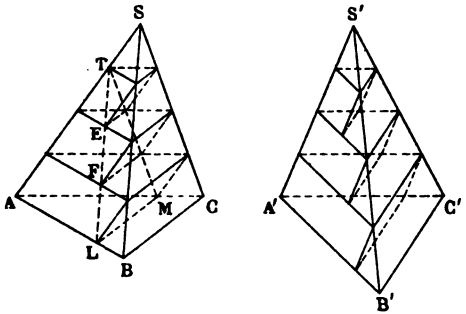
283. Corollaire I. — *Les bases d'un tronc de pyramide à bases parallèles sont des polygones semblables.*

284. Corollaire II. — *Lorsque deux pyramides ont des hauteurs égales et des bases équivalentes, des sections parallèles aux bases faites dans les deux pyramides par des plans menés à égale distance des sommets sont équivalentes.*

Volume de la pyramide et du tronc de pyramide.

285. Théorème. — *Deux pyramides triangulaires qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales sont équivalentes.*

Soient SABC, S'A'B'C' les deux pyramides considérées. Partageons les hauteurs en un même nombre de parties égales et, par les points de division, menons des plans parallèles aux bases ; les sections faites ainsi dans les deux pyramides par les plans équidistants des sommets sont des triangles



équivalents (284). Sur ces triangles construisons des prismes ayant leurs arêtes respectivement parallèles à SA et à S'A' ; les longueurs des arêtes de ces prismes sont alors égales (282, 1°) et il y a autant de prismes dans la première pyramide que dans la deuxième. D'ailleurs, les prismes de la première pyramide, numérotés à partir du sommet S, sont respectivement équiva-

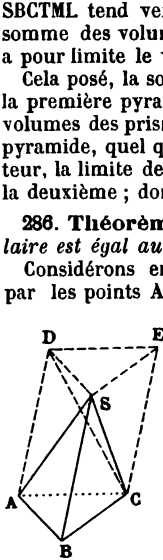
lents aux prismes de la deuxième, numérotés à partir du sommet S'. On appelle ces prismes des prismes *inscrits* dans les deux pyramides, et il est clair, en vertu de ce que nous venons de dire, que la somme des volumes des prismes inscrits dans la première pyramide est égale à la somme des volumes des prismes inscrits dans la deuxième. On en déduit facilement que si le nombre des divisions de la hauteur, c'est-à-dire si le nombre des prismes croît indéfiniment, la somme des volumes des prismes inscrits dans chaque pyramide a pour limite le volume de la pyramide correspondante.

En effet, si nous prenons, par exemple, la première pyramide, la différence entre son volume et la somme des volumes des prismes inscrits est inférieure au volume du tronc de pyramide SBCTML. Or, quand le nombre des divisions augmente indéfiniment, le point T se rapproche indéfiniment du point S, et le volume du tronc de pyramide SBCTML tend vers zéro. Cela signifie, *par définition*, que la somme des volumes des prismes inscrits dans la pyramide S a pour limite le volume de cette pyramide.

Cela posé, la somme des volumes des prismes inscrits dans la première pyramide étant toujours égale à la somme des volumes des prismes correspondants inscrits dans la deuxième pyramide, quel que soit le nombre des divisions de la hauteur, la limite de la première somme est égale à la limite de la deuxième ; donc les deux pyramides sont équivalentes.

286. Théorème. — *Le volume d'une pyramide triangulaire est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

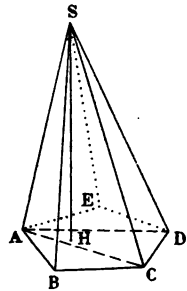
Considérons en effet une pyramide triangulaire SABC et, par les points A et C de la base, menons les parallèles à l'arête SA ; soient D et E les points de rencontre de ces parallèles avec le plan mené par S parallèlement au plan ABC. Si nous menons SD et SE, nous formons un prisme triangulaire ABCDSE qui a même base et même hauteur que la pyramide. Le volume de ce prisme étant égal au produit de sa base par sa hauteur, si nous prouvons que le volume de la pyramide est le tiers de celui du prisme, le théorème sera démontré.



Or, si du prisme nous détachons pyramide SABC, il reste une pyramide quadrangulaire SACI

composée de deux pyramides triangulaires SACD, SDEC qui sont équivalentes comme ayant des bases égales ACD et CDE, et des hauteurs égales. D'ailleurs la pyramide SCDE peut être considérée comme ayant pour sommet le point C et pour base DSE; mais alors elle est équivalente à la pyramide SABC (285), de sorte que le prisme se compose de trois pyramides équivalentes à la pyramide SABC. Cela revient évidemment à dire que le volume de cette pyramide est le tiers du volume du prisme ABCDSE, ce qui démontre la proposition.

287. Théorème. — *Le volume d'une pyramide quelconque est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*



Décomposons en effet la pyramide considérée SABCDE en pyramides triangulaires, SABC, SACD, etc. Toutes ces pyramides ayant même hauteur SH, si l'on appelle V le volume de la pyramide considérée, on a successivement

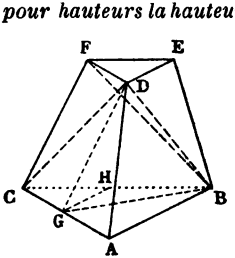
$$V = ABC \times \frac{1}{3} SH + ACD \times \frac{1}{3} SH + ADE \times \frac{1}{3} SH,$$

$$V = (ABC + ACD + ADE) \times \frac{1}{3} SH,$$

$$V = \frac{ABCDE \times SH}{3}.$$

C. Q. F. D.

288. Théorème. — *Un tronc de pyramide à bases parallèles est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteurs la hauteur du tronc et pour bases, la première la base inférieure du tronc, la seconde la base supérieure, et la troisième une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*



1° Considérons d'abord un tronc de pyramide à bases triangulaires ABC, DEF. Si, de ce tronc de pyramide, on détache la pyramide DCAB, en menant le plan DCB, on a la première pyramide de l'énoncé, et il reste une pyramide quadrangulaire de sommet D et de base BCEF. Le plan BDF partage cette pyramide en deux pyramides triangulaires de sommet D et

de bases respectives BEF, BCF. La première de ces pyramides pouvant être considérée comme ayant pour sommet B et pour base DEF est la deuxième pyramide de l'énoncé. Il reste donc à prouver que la pyramide DBCF est la troisième.

Pour cela, menons DG parallèle à CF et observons que tous les points de DG étant équidistants du plan BCF, la pyramide DBCF est équivalente à celle qui aurait pour sommet G et pour base le triangle BCF (285). Mais cette dernière pyramide peut être considérée comme ayant pour sommet le point F et pour base le triangle BCG ; si l'on observe alors que sa hauteur est égale à celle du tronc de pyramide, le théorème sera démontré si l'on prouve que l'aire du triangle BGC est moyenne proportionnelle entre les aires des deux triangles ABC, DEF. D'ailleurs, si l'on mène GH parallèle à AB, les deux triangles CGH et DEF sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun, savoir :

CG = DF comme parallèles comprises entre parallèles ; angle GCH = angle DFE comme ayant les côtés parallèles et dirigés dans le même sens ; angle CGH = angle FDE pour la même raison.

Il suffit donc de prouver que l'aire du triangle BCG est moyenne proportionnelle entre les aires des deux triangles ABC et CGH.

Or, les deux triangles ABC, BCG peuvent être considérés comme ayant pour hauteur la perpendiculaire menée du point B sur AC ; le rapport de leurs surfaces est alors égal au rapport des bases, et l'on a

$$\frac{ABC}{BCG} = \frac{CA}{CG}.$$

Pour une raison analogue, on a

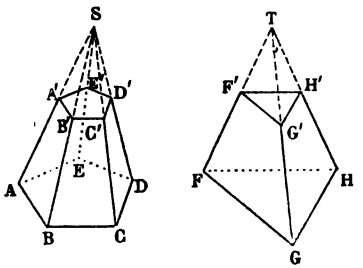
$$\frac{BCG}{CGH} = \frac{CB}{CH}.$$

Les seconds membres de ces égalités étant égaux à cause du parallélisme de AB et de GH, les premiers le sont aussi, et l'on a

$$\frac{ABC}{BCG} = \frac{BCG}{CGH},$$

ce qui démontre la proposition pour le tronc de pyramide à bases triangulaires.

2° Considérons maintenant un tronc de pyramide à bases parallèles mais quelconques. Ce tronc de pyramide ABCDEA'B'C'D'E' peut être considéré comme la différence des deux pyramides SABCDE, SA'B'C'D'E'. Construisons un triangle FGH équivalent au polygone ABCDE (194) et prenons ce triangle comme base d'une pyramide TFGH de même hauteur que la pyramide SABCDE. Les deux pyramides SABCDE, TFGH ayant des mesures égales sont équivalentes. Coupons la seconde de ces pyramides par le plan F'G'H' dont la distance au point T est égale à la distance du plan A'B'C'D'E' au point S ; alors le triangle F'G'H' est équivalent au polygone A'B'C'D'E' (284), de sorte que les deux pyramides SA'B'C'D'E', TF'G'H' sont aussi équivalentes. Il en résulte que les deux troncs de pyramide ABCDEA'B'C'D'E' et FGHF'G'H' sont eux-mêmes équivalents. Le théorème ayant été démontré pour le tronc de pyramide FGHF'G'H' à bases triangulaires s'étend alors au tronc de pyramide à bases polygonales.



289. Remarque. — Il suit de là que si l'on appelle V le volume d'un tronc de pyramide dont les bases sont B et b et la hauteur h, on a

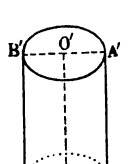
$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb}).$$

LIVRE VII : LES CORPS RONDS

Cylindre.

290. Définitions. — On appelle *cylindre circulaire droit* le volume engendré par un rectangle OAO'A' tournant autour

de l'un de ses côtés OO' appelé *axe* du cylindre. Dans ce mouvement la droite AA', appelée *arête* ou *génératrice*, engendre une surface appelée la *surface latérale* du cylindre ; les côtés OA et O'A' engendrent deux cercles égaux situés dans les plans perpendiculaires à l'axe et menés respectivement par O et par O' : on les appelle les *bases* du cylindre.



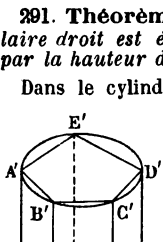
On appelle *hauteur* du cylindre la distance des deux bases ; enfin, on appelle *rayon* du cylindre le rayon de l'une quelconque des bases.

La hauteur du cylindre est évidemment égale à la longueur de l'axe ou à celle de la génératrice ; quant au rayon, il est égal à celui du cercle qu'on obtiendrait en coupant le cylindre par un plan quelconque parallèle aux bases.

On appelle *aire latérale* et *volume* d'un cylindre circulaire droit les limites respectives vers lesquelles tendent l'aire latérale et le volume d'un prisme régulier, dont les bases sont des polygones réguliers inscrits dans les polygones de base, quand le nombre des côtés de ces polygones augmente indéfiniment, de manière que chaque côté tende vers zéro.

291. Théorème. — *L'aire latérale d'un cylindre circulaire droit est égale au produit de la circonférence de base par la hauteur du cylindre.*

Dans le cylindre inscrivons en effet un prisme régulier ABCDEA'B'C'D'E'. L'aire latérale de ce prisme est la somme des aires de plusieurs rectangles ayant même hauteur que le cylindre et dont les bases respectives sont les côtés du polygone ABCDE ; il en résulte que cette aire latérale est égale au produit du périmètre de la base par la hauteur du cylindre.



Mais, si l'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés du polygone ABCDE, le périmètre de ce polygone a pour limite la longueur de la circonférence de base (175) ; comme l'aire latérale du prisme a pour limite l'aire latérale du cylindre, le théorème est démontré.

D'après cela, si l'on appelle S l'aire latérale d'un cylindre

de rayon R et de hauteur H, on a

$$S = 2\pi RH.$$

292. Aire totale. — C'est la somme de l'aire latérale et des aires des deux bases ; elle a pour expression

$$2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R(H + R).$$

293. Théorème. — *Le volume d'un cylindre est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

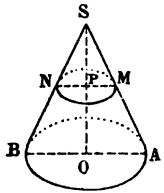
On inscrit encore un prisme régulier et on raisonne absolument comme pour le théorème précédent.

Si donc V désigne le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur H, on a

$$V = \pi R^2 H.$$

Cône et tronc de cône.

294. Définitions. — On appelle *cône circulaire droit* le volume engendré par un triangle rectangle SOA tournant autour d'un côté de l'angle droit SO. Dans ce mouvement, la droite SA, appelée *arête* ou *génératrice*, engendre la *surface latérale* du cône, et le côté OA, appelé *rayon* du cône, engendre un cercle qu'on appelle la *base* de ce cône. Ajoutons que SO s'appelle encore la *hauteur* du cône.



Si, d'un point M de la génératrice, on mène la perpendiculaire MP à l'axe, cette droite engendre un cercle de centre P, de rayon PM et dont le plan est perpendiculaire à l'axe. Il suit alors de là et de la similitude des deux triangles SPM, SOA : 1° *que les sections faites dans un cône circulaire droit par des plans perpendiculaires à l'axe sont des cercles ayant leurs centres sur l'axe* ; 2° *que les rayons de ces cercles sont proportionnels aux distances des sections aux sommets.*

On appelle *tronc de cône circulaire droit* la portion du volume d'un cône circulaire droit comprise entre la base et un plan parallèle à cette base. Tel est le solide ABMN. Les cercles AB et MN sont les *bases* du tronc de cône ; PO en est la *hauteur* et AM l'*arête* ou la génératrice.

On peut considérer ce tronc de cône comme engendré par le trapèze birectangle OAMP tournant autour de OP.

On appelle *aire latérale* et *volume* d'un cône les limites respectives vers lesquelles tendent l'aire latérale et le volume

d'une pyramide régulière ayant même sommet que le cône et pour base un polygone régulier inscrit dans la base du cône, quand le nombre des côtés de ce polygone augmente indéfiniment de manière que chaque côté tende vers zéro.

295. Théorème. — *L'aire latérale d'un cône est égale à la circonférence de base multipliée par la moitié de l'arête.*

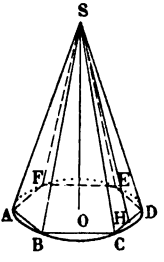
Inscrivons en effet dans le cône une pyramide régulière SABCDEF. L'aire latérale de cette pyramide est la somme des aires des triangles isocèles SAB, SBC, etc., qui sont tous égaux et ont, par conséquent, même hauteur SH. L'aire latérale de la pyramide est donc égale à

$$AB \times \frac{SH}{2} + BG \times \frac{SH}{2} + \cdots + FA \times \frac{SH}{2}$$

ou à

$$(AB + BC + \cdots + FA)\frac{SH}{2},$$

c'est-à-dire au périmètre du polygone de base multiplié par la moitié de SH, qui s'appelle l'*apothème* de la pyramide régulière.



Cela posé, quand le nombre des côtés du polygone de base augmente indéfiniment, SH a pour limite l'arête du cône, car les points C et D venant se confondre, le point H vient se confondre avec eux ; quant au périmètre du polygone ABCDEF, il a pour limite la circonférence de base. Donc la limite de l'aire de la pyramide, c'est-à-dire l'aire latérale du cône, est égale à la circonférence de base multipliée par la moitié de l'arête.

D'après cela, si l'on appelle S l'aire latérale d'un cône de rayon R et dont la longueur de l'arête est l, on a $S = \pi R l$.

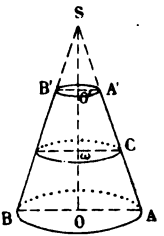
296. Théorème. — *L'aire latérale d'un tronc de cône est égale à la demi-somme des circonférences de base multipliée par l'arête.*

On peut, en effet, définir l'aire latérale du tronc de cône ABA'B' comme la différence des aires latérales des deux cônes SAB, SA'B'.

En appelant R et R' les rayons de base, l'aire latérale du

tronc de cône sera donc égale à

$$\pi R \times SA - \pi R' \times SA'.$$



Or les deux triangles semblables SAO, S'A'O' donnent

$$\frac{SA'}{R'} = \frac{SA}{R},$$

d'où l'on déduit le rapport égal $\frac{SA - SA'}{R - R'}$ ou $\frac{AA'}{R - R'}$; il s'ensuit

$$SA' = \frac{R' \times AA'}{R - R'}, \qquad SA = \frac{R \times AA'}{R - R'}.$$

En remplaçant SA et SA' par ces valeurs dans l'expression de l'aire latérale, on obtient

$$\frac{\pi AA' \times (R^2 - R'^2)}{R - R'} = \pi AA' \times (R + R'),$$

ce qui peut s'écrire $\frac{2\pi R + 2\pi R'}{2} \times AA'$, et alors le théorème est évident.

Ainsi, si l'on appelle l la longueur de l'arête d'un tronc de cône dont les rayons des bases sont R et R', l'aire latérale de ce tronc de cône a pour expression

$$\pi(R + R')l.$$

297. Remarque. — Par le milieu C de l'arête AA' (même figure) menons le plan parallèle aux bases. Nous obtenons ainsi un cercle dont le rayon ωC est égal à la demi-somme des rayons OA et O'A', parce que ωC joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze. Il en résulte que la longueur de la circonférence ωC est égale à

$$2\pi \frac{OA + O'A'}{2} = \pi(R + R');$$

donc l'*aire latérale d'un tronc de cône est égale à la circonférence équidistante des bases multipliée par la longueur de l'arête.*

298. Aire totale. — On appelle *aire totale* d'un cône la somme de l'aire latérale et de l'aire de la base. On définit d'une manière analogue l'aire totale d'un tronc de cône.

En conservant les notations des numéros précédents, l'expression de l'aire totale du cône est

$$\pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R) ;$$

de même l'expression de l'aire totale du tronc de cône est

$$\pi l(R + R') + \pi(R^2 + R'^2).$$

299. Théorème. — *Le volume d'un cône est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

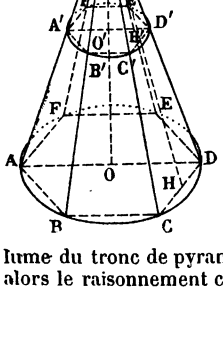
On inscrit dans le cône une pyramide régulière, comme au numéro 295, et on fait croître indéfiniment le nombre des côtés du polygone de base. Le volume de la pyramide étant égal au tiers du produit de la base par la hauteur, on en conclut le théorème énoncé à l'aide d'un raisonnement analogue à celui que nous avons fait pour le cylindre (295).

D'après cela, si H est la hauteur d'un cône de rayon R, l'expression du volume de ce cône est

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

300. Théorème. — *Le volume d'un tronc de cône à bases parallèles est égal à la somme des volumes de trois cônes qui ont pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases, le premier la base inférieure, le second la base supérieure, le troisième une moyenne proportionnelle entre les deux bases.*

Considérons en effet le volume du tronc de cône ADA'D' comme la différence des volumes des deux cônes SAD, SA'D'. Si l'on inscrit la pyramide régulière SABC... dans le premier cône, les arêtes de cette pyramide rencontrent la base supérieure du tronc de cône aux points A', B', C', ..., de sorte que SA'B'C'... est une pyramide régulière inscrite dans le second cône. Or, le volume de chaque cône est, par définition, la limite du volume de la pyramide inscrite correspondante ; donc le volume du tronc de cône, qui est la différence des volumes des deux cônes, pourra être considéré comme la limite de la différence des volumes des deux pyramides SABC..., SA'B'C'..., c'est-à-dire comme la limite du volume du tronc de pyramide ABC..., A'B'C',... On achève alors le raisonnement comme pour le cylindre.

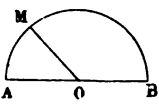


D'après cela, si R et R' sont les rayons de base d'un tronc de cône de hauteur H, l'expression du volume de ce tronc de cône est

$$\frac{1}{3}\pi H(R^2 + R'^2 + RR').$$

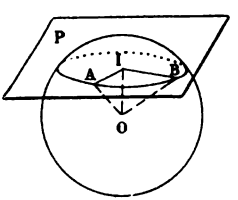
Généralités sur la sphère.

301. Définitions. — On appelle *sphère* la surface lieu des points à égale distance d'un point fixe appelé *centre*. La distance de tous les points au centre s'appelle le *rayon* de la sphère, et on appelle *diamètre* une ligne qui passe par le centre et qui est limitée à la surface.



On peut considérer une sphère comme la surface engendrée par une demi-circonférence AMB tournant autour de son diamètre AB; car, dans ce mouvement, tous les points de la demi-circonférence restent à une distance du centre égale au rayon.

302. Théorème. — *Toute section plane d'une sphère est un cercle.* — Soient, en effet, P le plan sécant, A et B deux points quelconques de la section. Par le centre O de la sphère, menons la perpendiculaire OI sur le plan P, et joignons le pied I de cette perpendiculaire aux points A et B. Nous formons ainsi deux triangles AOI et BOI, rectangles en I et égaux comme ayant OI commun et OA = OB comme rayons. Il résulte de là que IA = IB, et par conséquent que tous les points de la section sont à égale distance du point I; donc la section est une circonférence de centre I.



303. Grands cercles et petits cercles. — Si l'on considère le triangle rectangle OIA, on a

$$\overline{OI}^2 + \overline{IA}^2 = \overline{OA}^2,$$

de sorte que si l'on appelle d la distance du centre de la sphère au plan P, R le rayon de la sphère et r le rayon IA de la section, on a

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

Il en résulte que si l'on fait croître d depuis 0 jusqu'à R, le rayon r décroît depuis R jusqu'à 0. Donc les sections planes de la sphère qui ont le plus grand rayon sont celles dont le plan passe par le centre. Pour cette raison, on appelle *grand cercle* d'une sphère un cercle de la sphère dont le plan passe par le centre; par opposition, tout cercle dont le plan ne passe pas par le centre s'appelle un *petit cercle*.

Il est clair qu'un cercle tracé sur la sphère est déterminé en même temps que son plan; donc :

1° *Par trois points pris sur la surface d'une sphère, on peut faire passer un cercle et un seul.*

2° *Par deux points de la sphère non situés sur le même diamètre on peut faire passer un grand cercle et un seul*; car ces deux points et le centre de la sphère déterminent le plan du grand cercle.

Par deux points situés sur le même diamètre on peut évidemment faire passer une infinité de grands cercles.

Les plans de deux grands cercles passent tous deux par le centre; ils se coupent donc suivant un diamètre; d'où il suit que *deux grands cercles se coupent en deux points diamétralement opposés* et, par suite, que *deux grands cercles se coupent en parties égales.*

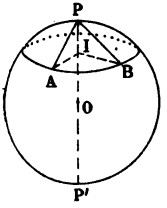
Ajoutons enfin que *tout grand cercle divise la sphère en deux parties égales*; car, si l'on fait tourner l'une des parties autour d'un diamètre de ce grand cercle, on peut la faire coïncider avec l'autre.

304. Théorème. — *Une droite ne peut rencontrer une sphère en plus de deux points.*

En effet, un plan passant par la droite coupe la sphère suivant une circonférence qui contient évidemment les points de rencontre de la droite et de la sphère; or, une droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.

305. Pôles d'un cercle. — On appelle *pôles* d'un cercle tracé sur la sphère les points de rencontre de la sphère avec le diamètre perpendiculaire au plan du cercle. Les pôles du cercle IAB sont les points P et P'.

L'un quelconque de ces points est également distant de tous les points du cercle IAB.



En effet, si A et B sont deux points quelconques de ce cercle et si I est son centre, les cordes PA, PB sont égales comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire.

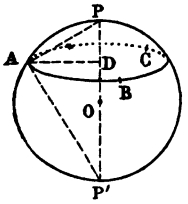
D'après cela, si l'on place en P l'une des pointes d'un compas, auquel on donne une ouverture égale à PA, l'autre pointe tracera le cercle IAB; on emploie, pour cela, un compas à branches recourbées appelé *compas sphérique*.

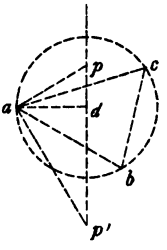
La distance PA s'appelle *distance polaire*; elle est égale à la corde d'un quadrant si le cercle est un grand cercle.

306. **Problème.** — *Trouver le rayon d'une sphère solide donnée, au moyen d'une construction plane.*

Soit O le centre de la sphère dont il suffit d'ailleurs d'avoir une portion. D'un point P de cette portion de surface comme pôle, avec une ouverture de compas sphérique arbitraire, décrivons un petit cercle sur cette même portion de surface. Prenons enfin trois points quelconques A, B, C sur la circonférence de ce cercle.

Avec le compas sphérique on peut mesurer les longueurs AB, BC, CA; on peut donc construire un triangle *abc* ayant pour côtés ces trois longueurs respectives. La circonférence circonscrite au triangle *abc* est évidemment égale au petit cercle tracé sur la sphère; de sorte que si *d* est le centre de la circonférence circonscrite au triangle *abc*, D le centre du cercle ABC, on a $ad = AD$.





Cela posé, si nous menons le diamètre PP' de la sphère qui passe par D, dans le triangle PAP', rectangle en A, nous connaissons AD, qui est égal à *ad*, et AP, qui est l'ouverture donnée au compas sphérique pour tracer le cercle ABC.

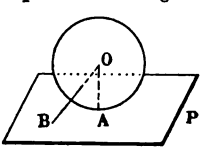
D'ailleurs, si nous pouvions construire ce triangle, l'hypoténuse PP' nous donnerait le diamètre de la sphère et par suite le rayon en en prenant la moitié. Or, on peut construire ce triangle en *pap'* de la manière suivante : on mène *pp'* perpendiculaire à *ad* au point *d*; on décrit du point *a* comme centre un arc de cercle de rayon $ap = AP$ qui coupe *pp'* au point *p*; enfin, on mène en *a* la perpendiculaire *ap'* à *ap*. La longueur *pp'* est le diamètre de la sphère.

Plan tangent à la sphère.

307. Définitions. — On appelle *plan tangent* à la sphère un plan qui n'a qu'un seul point commun avec la sphère; ce point s'appelle le *point de contact*.

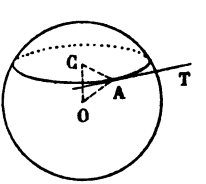
308. Théorème. — *Tout plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangent à la sphère; réciproquement tout plan tangent à la sphère est perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact.*

1° Soit P le plan perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA. La distance du point O à tout point B du plan étant plus grande que OA (218), le point B est extérieur à la sphère; donc le plan et la sphère n'ont que le point B commun; donc le plan P est tangent à la sphère.



2° Soit maintenant A le point de contact d'un plan tangent, P. Tout point B du plan étant alors extérieur à la sphère, OA est la plus courte de toutes les lignes qui vont du point O au plan P; donc OA est perpendiculaire au plan P (219).

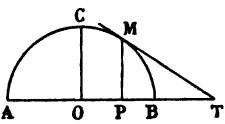
309. Théorème. — *Le plan tangent en un point* A *est le lieu géométrique des tangentes en* A *à toutes les circonférences tracées sur la sphère par le point* A.



Soit, en effet, AT la tangente en A à une circonférence de centre C, tracée sur la sphère considérée de centre O. Si l'on joint le point O au point C, OC est perpendiculaire au plan de la circonférence (302) et CA est perpendiculaire à la tangente AT, en vertu de la propriété de la tangente au cercle; donc OA est perpendiculaire à AT, d'après le

théorème des trois perpendiculaires ; mais alors AT est située dans le plan perpendiculaire à OA au point A (213), c'est-à-dire dans le plan tangent en A.

310. Cône circonscrit à une sphère. — En un point M d'une demi-circonférence AMB, menons la tangente MT et la perpendiculaire MP au diamètre, puis faisons tourner la figure autour de AB. Dans ce mouvement la demi-circonférence engendre une sphère de centre O et de rayon OC, et MT engendre la surface latérale d'un cône circulaire droit ayant pour base le cercle décrit par MP. Ce cône s'appelle le *cône circonscrit* à la sphère le long du cercle décrit par le point M.



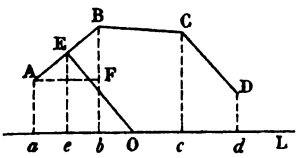
Le plan tangent en M à la sphère contenant la tangente MT (309) passe par le sommet du cône circonscrit. La même propriété subsiste évidemment quand le point M tourne autour de AB ; donc *les plans tangents à une sphère en tous les points d'un petit cercle passent par le sommet du cône circonscrit à la sphère le long de ce petit cercle.*

Quand le point M vient en C, le petit cercle décrit par M devient un grand cercle et MT engendre la surface indéfinie d'un cylindre appelé *cylindre circonscrit* le long du grand cercle OC.

Surface de la sphère.

311. Théorème. — *La surface engendrée par une ligne brisée régulière en tournant autour d'un axe situé dans son plan, passant par son centre, et ne la traversant pas, est égale au produit de la circonférence inscrite par la projection de la ligne brisée sur l'axe.*

Soit une ligne brisée régulière ABCD, de centre O, tournant autour de l'axe L, qui passe par son centre. L'aire engendrée par cette ligne est évidemment la somme des aires engendrées par ses côtés. Evaluons donc l'aire engendrée par l'un quelconque des côtés, AB par exemple.



En tournant autour de l'axe, AB engendre l'aire latérale d'un tronc de cône circu-

laire droit ; mais nous avons vu que si E est le milieu de AB et si l'on mène Ee perpendiculaire à l'axe, l'aire de ce tronc de cône est égale (296) à

$$2\pi Ee \times AB.$$

Joignons le point O au point E et menons AF parallèle à l'axe jusqu'au point de rencontre F avec la perpendiculaire Bb à l'axe. Les deux triangles rectangles OEe, ABF ayant leurs côtés perpendiculaires sont semblables ; donc on a

$$\frac{AB}{OE} = \frac{AF}{Ee}.$$

Il en résulte

$$AB \times Ee = OE \times AF.$$

D'ailleurs OE est l'apothème de la ligne brisée, c'est-à-dire le rayon de la circonférence inscrite, et AF est égale à la projection *ab* de AB sur l'axe. Si donc on fait la somme des aires engendrées par les côtés AB, BC, etc., en mettant $2\pi OE$ en facteur dans cette somme, on aura

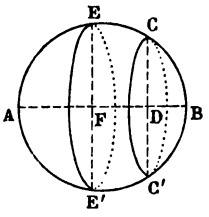
$$\text{Surf. } ABCD = 2\pi OE(ab + bc + cd) = 2\pi OE \times ad.$$

C.Q.F.D.

312. Définitions. — On appelle *zone* la portion de la surface de la sphère comprise entre deux plans parallèles ; ces deux plans coupent la sphère suivant deux cercles appelés *bases* de la zone. On appelle *hauteur* d'une zone la distance des deux bases.

Lorsque le plan de l'une des bases devient tangent à la sphère, on a une zone à une seule base appelée *calotte sphérique*.

Si l'on considère la zone comprise entre deux cercles CC' et EE' dont les plans sont perpendiculaires au diamètre AB, on peut la considérer comme engendrée par l'arc CE du grand cercle AECB en tournant autour du diamètre AB de ce grand cercle.



On appelle alors *aire* de cette zone la limite vers laquelle tend l'aire engendrée par une ligne brisée régulière convexe, inscrite dans l'arc CE et tournant autour de AB quand le nombre des côtés de cette ligne augmente indéfiniment de manière que chaque côté tende vers zéro. Si la hauteur FD de

zone devient égale au diamètre AB, la zone devient la sphère et l'aire de la zone devient l'aire de la sphère.

313. Théorème. — *L'aire d'une zone est égale au produit d'une circonférence de grand cercle par la hauteur de la zone.*

En effet, si l'on considère une ligne brisée régulière inscrite dans l'arc CE (même figure), et si l'on augmente indéfiniment le nombre des côtés de cette ligne de manière que chaque côté tende vers zéro, l'apothème de la ligne brisée a pour limite le rayon de la sphère. La hauteur de la zone étant d'ailleurs égale à la projection de la ligne brisée sur l'axe AB, le théorème résulte de celui qui a été démontré au n° 311. D'après cela, si R est le rayon de la sphère, l'aire d'une zone de hauteur h est égale à $2\pi Rh$.

314. Théorème. — *L'aire de la sphère est égale à quatre fois l'aire d'un grand cercle.*

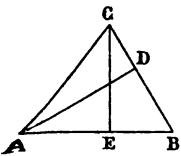
En effet, l'aire de la sphère est égale à l'aire d'une zone dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère. L'expression de l'aire de la sphère est donc $2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$. On voit qu'elle est égale à quatre fois l'aire d'un grand cercle.

Volume de la sphère.

315. Théorème. — *Le volume engendré par un triangle en tournant autour d'un axe situé dans son plan, passant par un de ses sommets et ne traversant pas le triangle, a pour mesure le produit de la surface engendrée par le côté opposé à ce sommet par le tiers de la hauteur correspondante à ce côté.*

Nous distinguerons quatre cas :

1° *Le triangle tourne autour de l'un de ses côtés.* — Soit ABC le triangle tournant autour de AB ; en désignant par Vol. ABC le volume engendré par ce triangle et par Surf. BC l'aire engendrée par BC, nous allons démontrer que l'on a



$$\text{Vol. ABC} = \text{Surf. BC} \times \frac{1}{3}\text{AD},$$

AD étant la hauteur correspondante au côté BC. Pour cela, menons CE perpendiculaire à AB et observons que l'on a

évidemment

$$\text{Vol. ABC} = \text{Vol. AEC} + \text{Vol. CEB}.$$

Or, les deux triangles rectangles AEC, CEB engendrent deux cônes circulaires droits de même rayon $\overline{CE}$ et de hauteurs respectives AE et EB ; on a donc

$$\text{Vol. AEC} = \frac{1}{3}\pi\overline{CE}^2 \times \text{AE},$$

$$\text{Vol. CEB} = \frac{1}{3}\pi\overline{CE}^2 \times \text{EB},$$

et, en faisant la somme,

$$\text{Vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{CE}^2 \times (\text{AE} + \text{EB}) = \frac{1}{3}\pi\overline{CE}^2 \times \text{AB},$$

ce que l'on peut écrire

$$\text{Vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi\text{CE} \times \text{CE} \times \text{AB}.$$

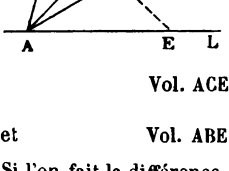
Mais les deux produits $CE \times AB$ et $BC \times AD$ sont égaux au double de la surface du triangle et par suite égaux entre eux : on peut donc remplacer $CE \times AB$ par $BC \times AD$. On a ainsi

$$\text{Vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi\text{CE} \times \text{BC} \times \text{AD}.$$

D'ailleurs, le produit $\pi CE \times BC$ représente l'aire latérale du cône engendré par BCE, c'est-à-dire l'aire engendrée par BC ; on a donc

$$\text{Vol. ABC} = \text{Surf. BC} \times \frac{1}{3}\text{AD}.$$

2° *L'axe rencontre le prolongement du côté opposé au sommet qui est sur l'axe.* — Soit E le point de rencontre de ce côté BC prolongé et de l'axe. On a évidemment



$$\text{Vol. ABC} = \text{Vol. ACE} - \text{Vol. ABE}.$$

Mais en vertu de 1°, si AD est la hauteur, on a

$$\text{Vol. ACE} = \text{Surf. CE} \times \frac{1}{3}\text{AD},$$

et

$$\text{Vol. ABE} = \text{Surf. BE} \times \frac{1}{3}\text{AD}.$$

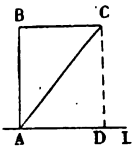
Si l'on fait la différence, en observant que

$$\text{Surf. BC} = \text{Surf. CE} - \text{Surf. BE},$$

il vient

$$\text{Vol. ABC} = \text{Surf. BC} \times \frac{1}{3}\,\text{AD}.$$

3° *Le triangle est rectangle et a un côté parallèle à l'axe et l'autre perpendiculaire à l'axe au point* A *qui est sur l'axe.* — Soit ABC ce triangle. Menons CD perpendiculaire à l'axe et observons que



$$\text{Vol. ABC} = \text{Vol. ABCD} - \text{Vol. ACD}.$$

Or, ABCD engendre le volume d'un cylindre de rayon $AB = CD$ et de hauteur BC ; on a donc

$$\text{Vol. ABCD} = \pi\overline{AB}^2 \times BC.$$

D'autre part, ACD engendre un cône de rayon CD et de hauteur AD, de sorte que

$$\text{Vol. ACD} = \frac{1}{3}\,\pi\overline{CD}^2 \times AD.$$

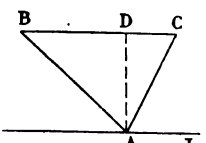
Si donc on fait la différence en observant que $CD = AB$ et que $AD = BC$, il vient

$$\text{Vol. ABC} = \frac{2}{3}\,\pi\overline{AB}^2 \times BC = 2\pi AB \times BC \times \frac{1}{3}\,AB.$$

Mais $2\pi AB \times BC$ est l'expression de l'aire engendrée par BC : donc

$$\text{Vol. ABC} = \text{Surf. BC} \times \frac{1}{3}\,AB.$$

4° *Le côté opposé au sommet situé sur l'axe est parallèle à l'axe.* — Si ABC est le triangle et AD la hauteur correspondante au côté BC, on a



$$\text{Vol. ABC} = \text{Vol. ACD} + \text{Vol. ADB}.$$

Mais en vertu de 3°,

$$\text{Vol. ACD} = \text{Surf. CD} \times \frac{1}{3}\,\text{AD},$$

$$\text{Vol. ADB} = \text{Surf. DB} \times \frac{1}{3}\,\text{AD} ;$$

donc, en ajoutant,

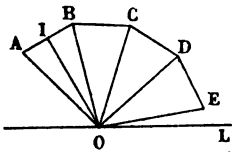
$$\text{Vol. ABC} = (\text{Surf. CD} + \text{Surf. DB}) \times \frac{1}{3}\,\text{AD} = \text{Surf. BC} \times \frac{1}{3}\,\text{AD}.$$

316. Théorème. — *Le volume engendré par un secteur polygonal régulier en tournant autour d'un axe situé dans son*

plan, passant par son centre et ne traversant pas le secteur, est égal à la surface décrite par la ligne brisée régulière du secteur multipliée par le tiers de l'apothème.

Soit le secteur polygonal régulier OABCDE tournant autour de l'axe OL. On a évidemment

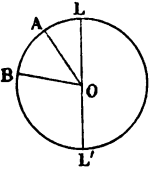
Vol. OABCDE = Vol. OAB + Vol. OBC + Vol. OCD + Vol. ODE.



Mais les triangles isocèles OAB, OBC, etc. sont égaux et ont pour hauteur commune l'apothème OI de la ligne brisée régulière. Si donc on applique le théorème précédent à chacun de ces triangles, et si l'on met $\frac{1}{3}$ OI en facteur dans la somme des volumes engendrés, on a

$$\text{Vol. OABCDE} = \text{Surf. ABCDE} \times \frac{1}{3}\ \text{OI}.$$

317. Définitions. — On appelle *secteur sphérique* la portion du volume d'une sphère engendrée par le secteur circulaire OAB en tournant autour d'un diamètre LOL', qui ne le traverse pas. Dans ce mouvement, l'arc AB du secteur circulaire engendre une zone qu'on appelle la *base* du secteur sphérique. Si AB devient une demi-circonférence LBL', le secteur circulaire devient un demi-cercle et le volume du secteur sphérique devient le volume de la sphère.



On appelle *volume* du secteur sphérique engendré par le secteur circulaire OAB la limite du volume engendré par un secteur polygonal régulier inscrit dans le secteur circulaire en tournant autour de l'axe LL', quand le nombre des côtés de la ligne brisée régulière qui sert de base au secteur polygonal augmente indéfiniment de manière que chaque côté tende vers zéro.

318. Théorème. — *Le volume d'un secteur sphérique est égal au produit de la zone qui lui sert de base par le tiers du rayon.*

Considérons en effet le secteur sphérique engendré par le secteur circulaire AOB (même fig.) en tournant autour du

diamètre LOL'. Dans ce secteur circulaire, imaginons qu'on ait inscrit un secteur polygonal régulier, puis imaginons que le nombre des côtés de la base de ce secteur polygonal régulier augmente indéfiniment de manière que chaque côté tende vers zéro. Le théorème énoncé résulte alors : 1° de ce que l'aire engendrée par la base du secteur polygonal a pour limite l'aire de la zone engendrée par l'arc AB ; 2° de ce que l'apothème de la base du secteur polygonal a pour limite le rayon de la sphère. On a donc

$$\text{Vol. Sect. OAB} = \text{Zone AB} \times \frac{1}{3}\,\text{OA}.$$

Appelons R le rayon de la sphère et h la hauteur de la zone engendrée par AB ; on aura

$$\text{Vol. Sect. OAB} = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

319. Théorème. — *Le volume de la sphère est égal au produit de sa surface par le tiers du rayon.*

Ce théorème résulte de ce que le volume de la sphère est le volume d'un secteur sphérique dont la zone de base est la surface de la sphère.

D'après cela, l'expression du volume d'une sphère de rayon R est

$$4\pi R^2 \times \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

On en déduit que *le rapport des volumes de deux sphères est égal au rapport des cubes des rayons.*

TABLE

Notions préliminaires 1

GÉOMÉTRIE PLANE

LIVRE I : La Ligne droite.

Les angles 3
Triangles et polygones 8
Perpendiculaires et obliques menées d'un point à une droite. — Cas d'égalité des triangles rectangles 15
Lieux géométriques 18
Droites parallèles 19
Somme des angles d'un triangle ou d'un polygone convexe. . 22
Parallélogrammes. 24

LIVRE II : Le Cercle.

Sécante et tangente. 27
Dépendance mutuelle des cordes et des arcs. 30
Positions relatives de deux cercles 33
Mesure des angles 36
Problèmes élémentaires sur la droite et le cercle. 41

LIVRE III : Les Figures semblables.

Lignes proportionnelles. 46
Similitude. 50
Relations entre les côtés d'un triangle rectangle 56
Propriétés, en ce qui concerne le cercle, des sécantes issues d'un même point. 58
Constructions géométriques 59
Polygones réguliers. 61
Rapport de la circonférence au diamètre 62

LIVRE IV : Les Aires.

Aire d'un polygone quelconque. 71
Rapport des aires de deux polygones semblables. 77
Aire d'un polygone régulier et d'un cercle. 84

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

LIVRE V : Le Plan.

Détermination du plan 80
Perpendiculaires et obliques à un plan 82
Parallélisme des droites et des plans. 87
Angles dièdres. 93
Plans perpendiculaires 96
Angles polyèdres. 97

LIVRE VI : Les Polyèdres.

Généralités sur les polyèdres 101
Volume des prismes droits 104
— — obliques 108
Généralités sur les pyramides 111
Volume de la pyramide et du tronc de pyramide. 113

LIVRE VII : Les Corps ronds.

Cylindre 117
Cône et tronc de cône 119
Généralités sur la sphère 123
Surface de la sphère 127
Volume de la sphère 129

[IV.]

Molusfei

COSMOGRAPHIE

Sphère céleste. — Principales constellations. — Mouvement diurne. — Ascension droite et déclinaison.

1. **Les astres et la sphère céleste.** — On donne le nom d'*astres* à tous les corps qui sont dans l'espace.

Les principaux astres sont pour nous le *Soleil* et la *Lune*. Le Soleil nous apparaît périodiquement. Il nous éclaire le *jour*. La Lune est quelquefois visible le jour, mais on la voit habituellement la *nuit*.

Parmi la multitude de corps brillants que nous voyons la nuit comme de simples points lumineux et qui sont des astres, il faut distinguer les *étoiles*, les *nébuleuses*, les *planètes*, les *satellites* de planètes, les *comètes*.

Les étoiles sont de beaucoup les plus nombreux des astres. Quand on les regarde à l'œil nu, on constate dans leur lumière un certain tremblement : c'est la *scintillation* des étoiles.

La scintillation disparaît lorsqu'on se sert d'une lunette, mais l'étoile qu'on regarde ne cesse pas d'apparaître comme un point lumineux, si puissante que soit la lunette.

Enfin, et c'est là leur caractère le plus remarquable, les étoiles paraissent occuper des positions invariables les unes par rapport aux autres, c'est-à-dire que si on mesure l'angle que font les rayons visuels allant de l'observateur à deux étoiles déterminées, cet angle reste constant.

Tous les astres nous paraissent fixés à une sphère creuse qui aurait pour centre le point où nous nous trouvons. On a donné à cette sphère le nom de *sphère céleste*. La conception de la sphère céleste est une fiction, car les astres ne se trouvent pas tous à la même distance de l'observateur, mais cette fiction, empruntée aux anciens, est commode lorsqu'il

s'agit d'étudier le mouvement d'ensemble des étoiles, et nous la conserverons.

2. Premier aspect du ciel. — Supposons un observateur de nos régions regardant attentivement le ciel à la fin d'un beau soir. Il s'aperçoit bientôt que les étoiles ne sont pas immobiles. S'il a à sa droite le Soleil couchant, il voit les étoiles qui se trouvaient au-dessus de sa tête au moment de la disparition du Soleil se déplacer vers sa droite et s'incliner vers l'*Occident* ; pendant ce temps de nombreuses étoiles apparaissent à sa gauche, à l'*Orient*, s'élèvent peu à peu dans le ciel et s'abaissent ensuite vers l'occident, alors que les étoiles précédentes ont déjà disparu.

L'observateur étant placé comme nous l'avons dit, les étoiles qui sont situées derrière lui, c'est-à-dire vers le ***Nord***, semblent décrire des cercles de plus en plus petits à mesure qu'elles se rapprochent de l'une d'elles, appelée la ***Polaire***, et que nous apprendrons à reconnaître au n° 4.

Les étoiles qui en sont suffisamment rapprochées, ne disparaissent jamais à nos yeux ; on les nomme *étoiles circumpolaires*.

Nous ne voyons pas les autres étoiles accomplir un tour entier dans le ciel ; elles s'élèvent d'abord, atteignent un maximum de hauteur, et vont ensuite se coucher après avoir traversé le ciel.

Dans la direction opposée au Nord, c'est-à-dire vers le ***Sud***, les cercles décrits par les étoiles diminuent à mesure que celles-ci s'éloignent davantage de l'étoile polaire, c'est-à-dire qu'elles se rapprochent davantage du point (caché pour l'observateur) qui, sur la sphère céleste, est opposé à la Polaire. Aussi ces étoiles ne sont-elles visibles que dans un temps très court. Elles se couchent presque aussitôt après s'être levées, sans avoir atteint une grande hauteur dans le ciel. D'après cela, le mouvement d'ensemble des étoiles, c'est-à-dire le mouvement de la sphère céleste est un mouvement de rotation autour d'un diamètre fixe de cette sphère passant sensiblement par l'étoile polaire.

Ce diamètre s'appelle *axe du monde*. On appelle *pôles* les deux points où l'axe du monde perce la sphère céleste. Le pôle que nous pouvons voir est le *pôle boréal* ou *arctique* ; l'autre est le *pôle austral* ou *antarctique*.

Les anciens, qui avaient remarqué ce mouvement de la

sphère céleste, s'abandonnant à leur imagination, la supposèrent solide. Pour expliquer les apparences de son mouvement, ils imaginèrent des cieux de cristal tournant sur deux pivots matériels autour desquels se trouvaient de petits moyeux.

3. **Classification des étoiles.** — Les étoiles ne sont pas toutes également brillantes. Quelques-unes sont douées d'un éclat très vif, mais il y en a beaucoup plus que l'on peut à peine voir à l'œil nu.

Pour faciliter l'indication de l'éclat d'une étoile, on a classé tous ces astres par ordre de *grandeur*. Ces mots : *grandeur d'une étoile*, se rapportent uniquement à l'éclat apparent de l'astre, de sorte qu'une étoile de première grandeur peut être beaucoup plus petite qu'une étoile de quatrième grandeur ; il suffit qu'elle soit notablement plus rapprochée de nous pour que son éclat paraisse plus grand.

Un observateur doué d'une vue moyenne aperçoit à l'œil nu les étoiles des six premières grandeurs.

4. **Principales constellations.** — La description du ciel étoilé se réduit aujourd'hui, pour chaque étoile, à la détermination de deux nombres, qu'on appelle l'ascension droite et la déclinaison. Ces deux nombres sont inscrits dans un catalogue. Les globes et les cartes célestes ne sont que les auxiliaires du catalogue. Nous verrons aux n^{os} 17 et suivants comment on définit et on mesure l'ascension droite et la déclinaison d'une étoile.

La confection des catalogues n'a été possible qu'après l'invention des instruments de mesure. Auparavant, les anciens avaient imaginé pour reconnaître et désigner les différentes étoiles un système descriptif assez compliqué, le système des constellations. Ils avaient remarqué que certaines étoiles sont disposées d'une façon assez régulière dans le ciel, formant des groupes faciles à distinguer. En s'attachant à former de pareils groupes, et en indiquant leurs positions relatives, on avait un système de repères dans le ciel. Ces groupes sont les *constellations*.

Les constellations portent différents noms qui tirent leur origine de ce que les anciens s'attachaient à enfermer chaque constellation dans un dessin, tel qu'une ourse, un chien, un chasseur avec son baudrier et sa massue, etc.

La connaissance de la constellation dont une étoile fait

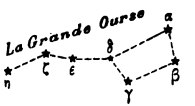
partie, entraîne la connaissance de la région du ciel où elle est placée. Pour la désigner complètement, il n'y a plus qu'à la distinguer des autres étoiles qui entrent dans la même constellation. On se sert pour cela des lettres de l'alphabet grec ; on désigne par α l'étoile la plus brillante d'une constellation, celle qui vient après est appelée β, et ainsi de suite. Si l'alphabet grec ne suffit pas, on lui adjoint l'alphabet romain. Enfin, si c'est nécessaire, on se sert ensuite de numéros d'ordre.

Cependant quelques étoiles occupant des positions remarquables dans les figures qui ont servi à définir les constellations, ont reçu des noms qui rappellent ces positions spéciales. C'est ainsi qu'il y a l'Œil du Taureau, l'Epi de la Vierge, le Cœur du Scorpion, etc.

Les astronomes comptent ordinairement 117 constellations. Le meilleur moyen de les connaître consiste à prendre un globe céleste ou une carte céleste, à en faire attentivement la lecture, et ensuite à s'attacher à reconnaître dans le ciel les constellations qu'on a étudiées.

Nous indiquons ici quelques belles constellations, faciles à retrouver.

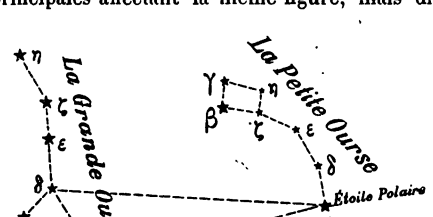
La *Grande-Ourse* ou le *Chariot* est facilement reconnaissable à la disposition des sept étoiles brillantes qui la composent. Elles sont toutes de deuxième grandeur, à l'exception de δ qui est de troisième grandeur. Les quatre étoiles α, β, γ, δ forment un trapèze (le corps de l'Ourse ou les quatre roues du Chariot) ; les trois autres, ε, ζ, η, forment un arc qu'on appelle la queue de l'Ourse. Les étoiles α et β s'appellent les gardes de la Grande-Ourse. Cette constellation s'aperçoit de la France en tout temps dans la région du Nord, et la queue de l'Ourse tourne sa convexité vers le pôle.



La ligne des gardes de la Grande-Ourse prolongée au-delà de α d'une longueur égale à cinq fois la distance αβ passe très près d'une étoile secondaire qui brille dans cette région du ciel : c'est la *Polaire*, dont nous avons déjà parlé. Elle se trouve à 1°28′ du pôle boréal.

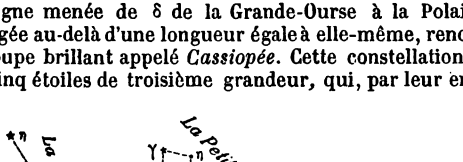
Quand on veut suivre une description du ciel étoilé, il faut, avant tout, distinguer la Grande-Ourse et reconnaître l'étoile Polaire.

La Polaire est placée à l'extrémité de la queue de la *Petite-Ourse*, constellation formée, comme la précédente, de sept étoiles principales affectant la même figure, mais disposées



en sens inverse et d'un éclat moindre que les sept étoiles de la Grande-Ourse.

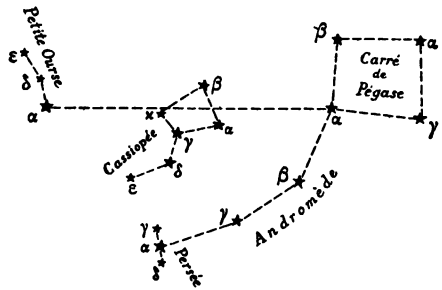
La ligne menée de δ de la Grande-Ourse à la Polaire, et prolongée au-delà d'une longueur égale à elle-même, rencontre un groupe brillant appelé *Cassiopée*. Cette constellation contient cinq étoiles de troisième grandeur, qui, par leur ensem-



ble, rappellent la forme d'un M très ouvert. Si, à ces cinq étoiles, on joint la petite étoile ϰ, on trouve à peu près la forme d'une chaise dont le dossier γδε serait brisé à l'étoile δ; les pieds de la chaise sont en α et β. C'est pour cette raison qu'on appelle aussi quelquefois cette constellation la *Chaise*.

Le *Carré de Pégase* est situé dans l'angle formé par les prolongements des deux lignes joignant la Polaire aux étoiles ϰ et δ de la Grande-Ourse. Sur les quatre étoiles de seconde

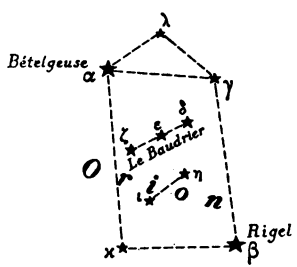
grandeur qui forment le carré de Pégase, il y en a trois qui appartiennent à la constellation de Pégase; la quatrième fait partie d'*Andromède.*



Cette constellation est formée par trois étoiles de deuxième grandeur qui sont presque en ligne droite avec une des diagonales du carré de Pégase.

Sur cette même ligne droite, et en continuant à s'éloigner de Pégase, on trouve l'étoile α de *Persée,* de deuxième grandeur. L'ensemble du carré de Pégase, des étoiles β et γ d'Andromède et de l'étoile α de Persée forme une grande figure ayant beaucoup d'analogies avec la Grande-Ourse.

Nous mentionnerons encore *Orion* ou le *Chasseur.* C'est la plus belle des constellations par son étendue et son éclat. Elle est, par sa forme, facilement reconnaissable, sans qu'il soit besoin de recourir aux étoiles déjà connues. Elle se compose de sept étoiles principales, dont quatre, α, ϰ, β, γ, sont aux sommets d'un grand quadrilatère, et dont les trois autres, δ, ε, ζ, sont serrées en ligne oblique, au centre de ce quadrilatère.



Sur ces sept étoiles, il y en a deux de première grandeur :

ce sont α ou *Bételgeuse*, β ou *Rigel*, l'épaule droite et le pied gauche du chasseur. Les trois étoiles du centre forment le *Baudrier* d'Orion, ou encore les *Trois Rois*, ou le *Rateau*.

En terminant ces rapides notions sur les constellations, nous dirons que les Anciens avaient particulièrement étudié la route du Soleil dans le ciel, et qu'ils avaient divisé cette route en douze parties contenant chacune une constellation. Ces douze constellations occupent dans le ciel une zone appelée Zodiaque. Nous en reparlerons à propos du Soleil.

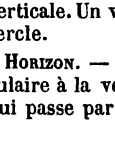
Cassiopée et Persée sont placées sur la *Voie lactée*, bande blanchâtre, irrégulière, qui partage le ciel en deux parties à peu près égales.

La Voie lactée paraît formée d'un très grand nombre d'étoiles, très serrées les unes contre les autres, mais trop éloignées pour qu'on puisse les distinguer à l'œil nu.

Mouvement diurne.

5. Définitions. — Nous avons déjà reconnu que les étoiles ont un mouvement d'ensemble. De plus, d'un coucher du Soleil à l'autre, les mêmes étoiles ont repris sensiblement les mêmes positions. Par conséquent, ce mouvement s'effectue à peu près dans l'espace d'un jour solaire. On lui a donné le nom de *mouvement diurne*. Avant de chercher les lois de ce mouvement, nous donnerons quelques définitions.

VERTICALE. — On appelle *verticale* d'un lieu à la surface de la Terre, la direction de la pesanteur en ce lieu. Cette direction est déterminée par le fil à plomb; elle est perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles.



ZÉNITH, NADIR. — La verticale d'un lieu perce la sphère céleste en deux points diamétralement opposés; celui qui est au-dessus de la tête de l'observateur s'appelle le *Zénith;* on donne à l'autre le nom de *Nadir*.

VERTICAL. — On nomme *vertical* tout plan mené par la verticale. Un vertical coupe la sphère céleste suivant un grand cercle.

HORIZON. — On appelle *plan horizontal* un plan perpendiculaire à la verticale. On appelle *horizon* le plan horizontal qui passe par l'œil de l'observateur. On appelle *horizon ra-*

tionnel ou *astronomique* le plan parallèle à l'horizon passant par le centre de la Terre.

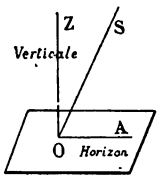
Les différents rayons lumineux qui partent de l'œil de l'observateur tangentiellement à la surface de la Terre, sont les génératrices d'un cône circonscrit à cette surface. La courbe de contact suivant laquelle ce cône se raccorde avec la surface de la Terre est l'*horizon sensible*. On appelle *dépression de l'horizon apparent*, ou simplement *dépression apparente* l'angle de chacune des génératrices de ce cône avec l'horizon. Étant données les hauteurs relativement faibles auxquelles nous pouvons nous élever, cet angle est petit.

Azimut. — On appelle *azimut* d'un astre l'angle que fait un vertical passant par l'astre avec un vertical choisi arbitrairement. Cet angle se compte de 0° à 360°, d'habitude dans le sens des aiguilles d'une montre.

Hauteur apparente. — La *hauteur apparente* d'un astre au-dessus de l'horizon est l'angle que fait avec l'horizon le rayon visuel joignant l'œil de l'observateur à l'astre.

La position d'un astre sur la sphère céleste à un instant donné est complètement déterminée quand on connaît son azimut et sa hauteur apparente à cet instant.

Distance zénithale. — On appelle *distance zénithale* d'un astre l'angle que fait avec la verticale le rayon visuel mené de l'œil de l'observateur à l'astre. Sur la figure, l'angle ZOS est la distance zénithale de l'astre S.



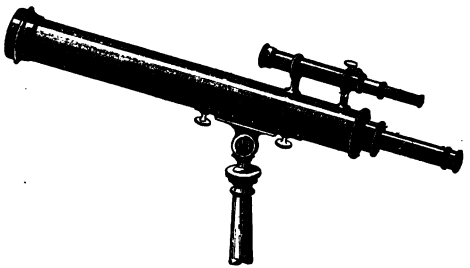
L'angle AOS représente la hauteur apparente du même astre.

On voit immédiatement sur la figure que la distance zénithale est complémentaire de la hauteur apparente.

On peut, pour déterminer la position d'un astre sur la sphère céleste, substituer la distance zénithale à la hauteur apparente. On compte les distances zénithales positivement vers le pôle, négativement dans le sens contraire.

Distance angulaire. — On appelle *distance angulaire* de deux points l'angle des rayons visuels allant de l'œil de l'observateur à ces deux points ; il est mesuré par l'arc de grand cercle de la sphère céleste passant par ces deux points.

6. Lunette astronomique. — La lunette astronomique se compose essentiellement de deux lentilles, dont l'une, appelée *objectif*, est à l'extrémité de l'instrument et reçoit la lumière des astres, et dont l'autre, appelée *oculaire*, sert à regarder l'image de l'astre formée par l'objectif. Pour que la ligne de visée soit toujours exactement la même et que les directions des astres soient parfaitement définies, il faut que leur image se fasse toujours exactement au même point. Voici comment on y arrive : dans le plan où se forme l'image pro-



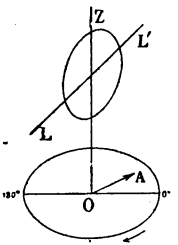
duite par l'objectif, on dispose un *réticule*, c'est-à-dire un petit diaphragme métallique dont le centre est évidé et reçoit deux fils très fins (fils métalliques ou fils d'araignée) disposés en croix. C'est au point de croisement de ces fils que doit se former l'image de l'astre, et la ligne qui joint ce point au centre optique de l'objectif est l'*axe optique* de la lunette.

Plus le grossissement d'une lunette astronomique est grand, plus est petit le champ de l'instrument, c'est-à-dire l'étendue embrassée par la lunette ; aussi surmonte-t-on les puissantes lunettes d'une autre, plus petite, appelée *chercheur*, dont le grossissement est faible, mais dont le champ, qui est grand, facilite la recherche des astres.

7. Théodolite. — La hauteur et l'azimut d'un astre se mesurent facilement au moyen du *théodolite*.

Cet instrument, réduit à ses parties essentielles, se compose : .

1° d'un axe OZ perpendiculaire au plan d'un plateau sur lequel on a tracé un cercle divisé ayant son centre au pied de l'axe ;



2° d'une lunette astronomique LL mobile autour d'un axe perpendiculaire à OZ et rencontrant OZ (le point d'intersection de ces deux axes est, en plus, situé sur l'axe optique de la lunette) ;

3° d'un cercle gradué passant par OZ et dans le plan duquel se déplace l'axe optique de la lunette. La ligne 0° — 180° de ce cercle coïncide avec ZO.

L'axe OZ peut tourner sur lui-même ; il porte une alidade mobile OA qui se déplace le long du plateau. Le plateau est gradué ; il est muni de trois vis calantes et de deux niveaux à bulle d'air, perpendiculaires l'un à l'autre, ce qui permet de le rendre horizontal.

Usage du théodolite. — Supposons le plateau de l'instrument horizontal ; l'axe OZ est dès lors vertical. Visons avec la lunette LL' une étoile quelconque, quelque temps après son lever. Supposons que 60 soit le numéro de la division observée sur le cercle vertical, et 45 le numéro de la division observée sur le cercle du plateau. D'abord, la distance zénithale de l'astre est à ce moment 60° ; sa hauteur est donc de $90 - 60 = 30°$.

Si on prend pour plan origine des azimuts le plan vertical qui correspond à la division zéro, l'azimut de l'étoile est à ce moment de 45°.

Au bout de quelque temps la distance zénithale de l'étoile n'est plus la même. Si on a eu soin de prendre une étoile plus voisine que le zénith de l'étoile polaire, on voit cette distance zénithale diminuer graduellement, passer par un minimum, puis augmenter. Lorsque la distance zénithale est de nouveau 60°, on lit la division indiquée par l'alidade sur le plateau : soit 85°.

La bissectrice OM de l'angle formé par les deux positions 45 et 85 de l'aiguille du plateau correspond à la division $\frac{45 + 85}{2}$, c'est-à-dire à 65°.

Imaginons maintenant :

1° que l'on répète les mêmes observations sur la même

étoile, mais en variant l'instant de la première observation ;

2° que l'on recommence cette série d'observations sur autant d'étoiles que l'on veut.

Chaque fois qu'on cherchera la bissectrice de l'angle formé par les deux positions de l'aiguille du plateau, on retrouvera le même nombre 65°, et, par conséquent, la même bissectrice **OM**.

On en conclut que : *les étoiles décrivent sur la sphère céleste des courbes qui ont leurs points deux à deux symétriques par rapport à un certain plan* **ZOM** *dont la position ne dépend que du lieu où on fait les observations.*

8. Plan méridien, sa détermination. — Ce plan **ZOM** s'appelle le *plan méridien* du lieu d'observation. Il coupe la sphère céleste suivant un grand cercle appelé *méridien céleste*; la Terre suivant un cercle appelé *méridien terrestre*, et l'horizon suivant une ligne appelée *méridienne*.

Chaque étoile traverse deux fois le plan méridien. Ces deux passages s'appellent *culmination supérieure* et *culmination inférieure*. Toutes les culminations supérieures sont situées du même côté que le zénith, par rapport à l'axe du monde, dont nous apprendrons à déterminer la position dans le numéro suivant.

9. Pôle, sa détermination. — Faisons tourner l'axe du théodolite jusqu'à ce que le cercle vertical soit dans le plan méridien. Cela aura lieu lorsque l'aiguille du plateau coïncidera avec la position **OM**.

L'axe optique de la lunette se déplace alors dans le plan méridien.

Choisissons une étoile qui reste visible toute la nuit, et visons-la à ses deux culminations ; soit **OP** la bissectrice de l'angle formé par les deux directions correspondantes de l'axe optique de la lunette.

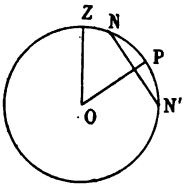
Répétons les mêmes opérations avec une autre étoile, et nous retrouverons le point P précédemment obtenu.

On en conclut que :

Les culminations supérieure et inférieure d'une étoile quelconque sont équidistantes d'un point fixe P *de la sphère céleste, dont la position ne dépend que du lieu d'observation.*

Pour déterminer la position du point P sur la sphère

céleste, il suffit de connaître sa distance zénithale représentée sur la figure par l'arc ZP.



Or, on a

$$\text{arc ZP} = \text{arc ZN} + \text{arc NP},$$

$$\text{arc ZP} = \text{arc ZN'} - \text{arc N'P},$$

en désignant par N et N' les deux culminations d'une même étoile. Ajoutons ces deux égalités membre à membre, en remarquant que arc NP = arc N'P; on aura

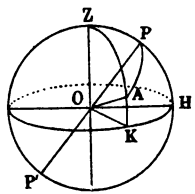
$$2 \text{ arc ZP} = \text{arc ZN} + \text{arc ZN'},$$

d'où

$$\text{arc ZP} = \frac{\text{arc ZN} + \text{arc ZN'}}{2}.$$

Cela veut dire que, *pour avoir la distance zénithale du pôle, on fait la moyenne arithmétique des distances zénithales d'une même étoile à ses deux culminations.*

10. Définitions. — La figure ci-contre représente la sphère céleste. On suppose l'observateur placé en O et regardant une étoile A. OZ est la verticale, Z étant le zénith ; le plan OHK est l'horizon, P est le pôle.



Par conséquent, le plan méridien du lieu est le plan POZ, puisqu'il doit contenir le pôle P et la verticale OZ.

La distance zénithale du pôle est l'angle ZOP. L'angle POH est la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon. Enfin, la droite OP s'appelle l'*axe du monde*, et l'angle AOP est la *distance polaire* de l'étoile A.

Une étoile qui reste toujours au-dessus de l'horizon est une étoile *circumpolaire*.

Puisque la distance zénithale et la hauteur apparente d'un astre sont complémentaires, la connaissance de l'un de ces éléments entraîne celle de l'autre.

A Paris, la distance zénithale du pôle est 41°9'10", *et la hauteur apparente du pôle au-dessus de l'horizon est par suite* 48°50'49".

11. Équatorial. — Pour achever l'étude des lois du

mouvement diurne, nous nous servirons de l'*équatorial*, appelé aussi *machine parallactique*.

Cet instrument est analogue au théodolite ; seulement, lorsque le plateau est horizontal, l'axe de l'appareil est dirigé suivant l'axe du monde OP. De plus, l'axe de l'équatorial tourne avec une vitesse constante, qui lui est communiquée par un mouvement d'horlogerie, et on peut régler ce mouvement de façon que l'appareil fasse un tour complet dans l'intervalle de deux culminations supérieures consécutives d'une étoile déterminée.

On vise cette étoile, et on laisse la lunette de l'appareil dans l'état où il a fallu la mettre. Son axe optique décrit alors, dans le mouvement de l'équatorial, un cône de révolution autour de l'axe du monde, et si on met l'œil à la lunette, on voit toujours l'étoile, à quelque instant qu'on regarde.

Il y a plus ; si, avec l'équatorial réglé comme nous l'avons indiqué, on vise une autre étoile, on ne cesse pas de l'apercevoir, à quelque instant que l'on regarde.

Cette observation peut se renouveler chaque jour. Les mêmes phénomènes se reproduisent lorsqu'on change le lieu d'observation. La hauteur du pôle peut seule varier.

Il suit de là que la courbe décrite par une étoile est un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe du monde, et dont le centre est sur cet axe. L'étoile parcourt ce cercle d'un mouvement uniforme.

12. Énoncé de la loi du mouvement diurne. — En rapprochant les uns des autres tous les résultats précédents, on peut dire que :

Toutes les étoiles paraissent tourner d'un mouvement uniforme autour de l'axe du monde, de gauche à droite pour un observateur de nos régions tournant le dos au pôle.

13. Jour sidéral. — L'intervalle de deux culminations supérieures consécutives d'une même étoile se nomme *jour sidéral*. Le jour sidéral est l'unité de temps employée en astronomie. Sa durée est la plus invariable que l'on connaisse.

Le jour sidéral est divisé en vingt-quatre heures sidérales ; l'heure sidérale en soixante minutes sidérales, et la minute sidérale en soixante secondes sidérales.

On a construit des horloges dont la petite aiguille fait le tour du cadran en un jour sidéral et dont le pendule bat la seconde sidérale. Ce sont des *horloges sidérales*.

14. Cercles de la sphère céleste. — Le grand cercle de la sphère céleste perpendiculaire à l'axe du monde se nomme *équateur* ; l'équateur partage la sphère céleste en deux hémisphères ; celui qui contient le pôle P s'appelle l'*hémisphère boréal* ; l'autre, l'*hémisphère austral*.

Les petits cercles de la sphère céleste parallèles au plan de l'équateur se nomment des *parallèles*.

On appelle *cercles horaires* les grands cercles dont le plan contient l'axe du monde.

15. Conversion des temps en degrés et des degrés en temps. — On appelle *angle horaire* d'une étoile l'angle dièdre que forme le plan de son cercle horaire avec le plan du méridien. On le compte de 0° à 360° dans le sens du mouvement diurne.

En un jour sidéral, l'angle horaire varie de 360°. En une heure sidérale, il variera de $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$, et en t heures sidérales, il variera de $15^\circ \times t$. Par conséquent, lorsqu'une étoile a passé au méridien 3 heures avant le moment où on l'observe, son angle horaire est de $15^\circ \times 3$ ou de 45°.

Inversement, si l'angle horaire varie de 360° en un jour sidéral, ou, ce qui revient au même, en 1440 minutes sidérales, il ne faudra que $\frac{1440^{m.s.}}{360} = 4^{m.s.}$, pour qu'il varie de 1°.

Par conséquent, pour que cet angle horaire varie de n degrés, il faudra $4n$ minutes sidérales.

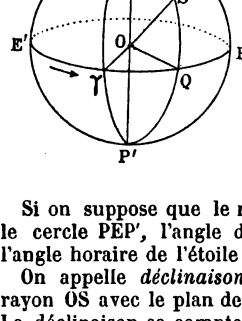
Si, par exemple, on mesure l'angle horaire d'une étoile à un instant donné, et si on trouve 37°, on en déduira que cette étoile a passé au méridien il y a $37 \times 4^{m.s.} = 148$ minutes sidérales, ou encore il y a $2^{h.s.}28^{m.s.}$

Ascension droite et déclinaison.

16. Le système des distances zénithales et des azimuts permet de fixer la position d'une étoile sur la sphère céleste.

Les lois du mouvement diurne nous fournissent un système bien préférable : celui des ascensions droites et des déclinaisons.

17. Définitions. — Soient : PP′ l'axe du monde, EQE′ l'équateur. On appelle *ascension droite* d'une étoile S l'angle de son cercle horaire PSP′ avec un cercle horaire convenablement choisi et pris pour origine. Ce dernier cercle coupe l'équateur en un point γ que l'on appelle l'*origine des ascensions droites*. L'ascension droite est donc égale à l'angle γOQ. Les ascensions droites se comptent sur l'équateur de 0° à 360°, en partant du point γ, de l'ouest à l'est, dans le sens indiqué par la flèche.



Si on suppose que le méridien du lieu soit représenté par le cercle PEP′, l'angle des deux cercles PSP′ et PEP′ est l'angle horaire de l'étoile S (n° 14).

On appelle *déclinaison* d'un astre S l'angle que fait le rayon OS avec le plan de l'équateur ; c'est donc l'angle QOS. La déclinaison se compte de l'équateur au pôle, de 0° à 90°. Elle est *boréale* ou *australe* selon que l'astre est dans l'hémisphère boréal ou dans l'hémisphère austral. Nous conviendrons de compter les déclinaisons positivement ou négativement suivant qu'elles seront boréales ou australes. Avec cette convention, *la déclinaison d'un astre est, dans tous les cas, le complément de sa distance polaire.*

Remarque. — Quand on connaît l'ascension droite et la déclinaison d'une étoile, sa position sur la sphère céleste est parfaitement déterminée. En effet, connaissant l'ascension droite α, on fait avec Oγ, dans le sens de la flèche, et dans le plan de l'équateur, un angle γOQ égal à α. Ensuite, dans le cercle PQP′ on mène une droite OS faisant avec OQ un angle QOS égal à la déclinaison donnée D, en ayant soin de porter cette droite dans l'hémisphère boréal ou dans l'hémisphère austral suivant que le nombre donné D est positif ou négatif.

Ces deux éléments, ascension droite ou déclinaison, qui

permettent de déterminer complètement la position d'un astre, s'appellent ses *coordonnées.*

18. Mesure de l'ascension droite. — On voit facilement que l'*ascension droite d'un astre, augmentée de l'angle horaire de cet astre, est égale à l'angle horaire du point* γ.

En effet, $\widehat{\gamma O E}$ est l'angle horaire du point γ,

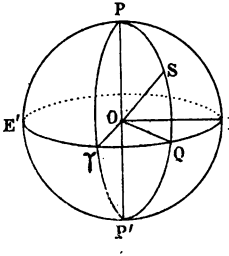
$\widehat{\gamma O Q}$ est l'ascension droite de l'astre S,

$\widehat{Q O E}$ est l'angle horaire de l'astre S,

et on a sur la figure

$$\widehat{\gamma O E} = \widehat{\gamma O Q} + \widehat{Q O E}.$$

Ceci posé, nous voyons que lorsqu'une étoile S est à sa culmination supérieure, son angle horaire est nul. Par conséquent, son ascension droite est, à ce moment, égale à l'angle horaire du point γ.



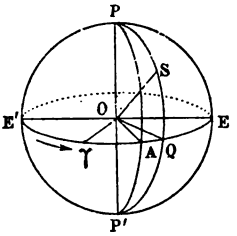
Supposons qu'on possède une horloge sidérale, et qu'on l'ait réglée de façon qu'elle marque $0^h\,0^m\,0^s$ au moment du passage du point γ au méridien : soit t l'heure sidérale du passage au méridien de l'étoile S. D'après le n° 15, l'angle horaire du point γ est à cet instant $15^\circ \times t$. Par conséquent, l'ascension droite de l'étoile est aussi $15^\circ \times t$.

On en conclut la règle suivante :

Pour avoir l'ascension droite d'une étoile, on règle une horloge sidérale de façon qu'elle marque $0^h\,0^m\,0^s$ *au moment du passage du point* γ *au méridien ; lorsque l'étoile considérée passe au méridien, on regarde l'heure, et en multipliant par* 15 *le nombre ainsi observé, on obtient en degrés l'ascension droite de l'étoile.*

Remarque. — On peut évidemment prendre pour origine des ascensions droites un point quelconque de l'équateur. Nous verrons dans la théorie du Soleil quelles sont les raisons qui ont conduit à prendre l'origine actuelle.

Supposons qu'on prenne provisoirement pour origine des ascensions droites le point A où le cercle horaire d'une étoile remarquable coupe l'équateur. On pourra calculer à l'aide de ce point les ascensions droites de toutes les étoiles. Ensuite, pour avoir les ascensions droites définitives, quand on prend le point γ pour origine, il suffira d'ajouter à tous les nombres précédents l'ascension droite du point A par rapport à γ.



19. Exemple. — *Trouver l'ascension droite d'une étoile* S, *sachant qu'elle a passé au méridien à* $9^h\,48^m\,27^s$ *et que l'heure du passage de* γ *au méridien était* $2^h\,30^m\,49^s$.

Pour que l'horloge sidérale marque $0^h\,0^m\,0^s$, il faudrait la retarder de $2^h\,30^m\,49^s$; l'heure du passage de S au méridien serait alors $7^h\,17^m\,38^s$ ou $\left(7+\frac{17}{60}+\frac{38}{60\times 60}\right)^h$.

Par conséquent, l'ascension droite de l'étoile exprimée en degrés est

$$\left(7+\frac{17}{60}+\frac{38}{60\times 60}\right)\times 15$$

ou $$7^\circ\times 15+17'\times 15+38''\times 15$$

ou $$105^\circ+255'+570''.$$

Or
$$570''=9'30''$$
$$255'$$
$$+\quad 9'$$
$$264'=4^\circ 24'.$$

Donc on a pour valeur de l'ascension droite

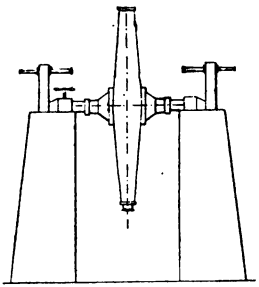
$$109^\circ\,24'\,30''.$$

Inversement, connaissant l'ascension droite d'une étoile, on peut calculer l'heure de son passage au méridien.

20. Lunette méridienne. — Pour mesurer des ascensions droites, il ne s'agit en définitive que d'observer des passages d'étoiles au méridien, et l'on conçoit que le théodolite puisse fort bien se prêter à cet usage.

Mais, dans les observatoires, on aime mieux avoir des instruments plus stables que le théodolite.

La *lunette méridienne* se compose d'une lunette astronomique tournant autour d'un axe horizontal placé de telle façon que son axe optique décrive le plan méridien.



Pour réaliser cette condition, il faut de grands soins de construction et des vérifications minutieuses, mais lorsqu'on est arrivé au but, on n'est plus obligé de recommencer à chaque fois, comme avec le théodolite, la détermination du méridien. L'axe de rotation de la lunette repose sur de solides piliers de maçonnerie destinés à donner de la stabilité à l'appareil.

Pour se servir d'une lunette méridienne, il n'y a qu'à noter l'instant où une étoile déterminée passe dans le champ de la lunette, plus exactement, au point de croisement des fils du réticule.

21. Mesure de la déclinaison. — Lorsque le cercle vertical du théodolite est dans le plan méridien, on peut viser une étoile à sa culmination, et si on a déterminé la direction de l'axe du monde, une simple lecture du cercle gradué donnera la distance polaire de l'étoile. En prenant le complément, on aura sa déclinaison.

On emploie plus souvent une méthode qui s'appuie sur la remarque suivante :

La déclinaison d'une étoile est égale à la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon, augmentée de la distance zénithale de cette étoile à sa culmination supérieure.

Prenons en effet pour plan de figure le méridien du lieu. Soient OZ la verticale, OH la trace de l'horizon, OE celle de l'équateur, OP l'axe du monde et AA' la trace du parallèle que décrit l'étoile.

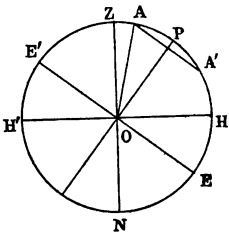
La distance polaire étant égale à l'angle POA, la déclinaison D de l'étoile S est égale à $90^\circ - \widehat{POA}$.

Or on a

$$\widehat{POA} = \widehat{ZOP} - \widehat{ZOA},$$

de sorte qu'on peut écrire

$$D = 90^\circ - (\widehat{ZOP} - \widehat{ZOA})$$
$$= 90^\circ - \widehat{ZOP} + \widehat{ZOA}.$$



Or, $90^\circ - \widehat{ZOP}$, c'est $\widehat{HOP}$, ou la hauteur H du pôle au-dessus de l'horizon.

$\widehat{ZOA}$ est la distance zénithale δ de l'étoile à sa culmination.

On a donc bien

$$D = H + \delta.$$

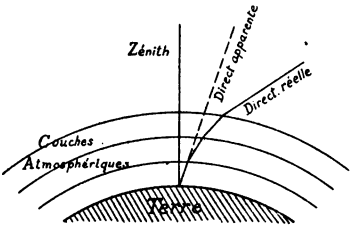
La hauteur H du pôle au-dessus de l'horizon est connue une fois pour toutes. Pour déterminer δ, on peut, bien entendu, faire usage du théodolite, mais dans les observatoires on emploie aussi le *cercle mural*.

22. Cercle mural. — Le cercle mural se compose d'une lunette dont l'axe optique décrit le plan méridien. Cette lunette tourne autour d'un axe fixé à un mur parallèle au plan méridien et sur lequel on a placé un cercle de cuivre gradué. La ligne $0^\circ - 180^\circ$ de ce cercle coïncide avec la verticale, de sorte qu'une simple lecture donne la distance zénithale.

23. Réfraction atmosphérique. — On apprend, en physique, que lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu dans un autre (de l'air dans l'eau, dans le verre, du verre dans l'eau, etc., etc.), il ne continue pas sa route en ligne droite (à moins qu'il ne soit perpendiculaire à la surface de séparation des deux milieux) ; il est dévié ; il subit ce qu'on appelle une *réfraction*. C'est ainsi qu'un bâton plongé à moitié dans l'eau nous apparaît comme s'il était brisé.

L'atmosphère terrestre exerce sur les rayons lumineux une action analogue, parce qu'elle est composée de couches dont la densité va en diminuant à mesure qu'on s'éloigne de la surface de la Terre. Ces couches de densité décroissante agissent comme des milieux différents et réfractent les

rayons lumineux. Aussi, lorsqu'une étoile n'est pas au zénith, les rayons qu'elle nous envoie n'étant pas perpendiculaires aux couches atmosphériques, subissent une première réfraction en atteignant la couche supérieure, puis une seconde, et ainsi de suite, de sorte qu'ils traversent l'atmosphère suivant une ligne brisée et qu'ils nous arrivent dans une direction fort différente de celle de l'étoile d'où ils émanent. Par conséquent, les visées des étoiles non situées au zénith sont entachées d'erreur. Pour les rectifier, on a construit des tables de correction, basées sur les connaissances qu'on a acquises des lois de la réfraction atmosphérique.



Une conséquence de cette réfraction est qu'en un lieu on peut voir des étoiles qui sont à ce moment au-dessous de l'horizon du lieu : on peut embrasser plus de la moitié de la sphère céleste, et cependant, par l'effet même de la réfraction, qui fait apparaître la voûte céleste comme surbaissée, il semble qu'on voie au-dessus de nos têtes moins d'un hémisphère.

Autre exemple de la réfraction atmosphérique, bien connu des navigateurs : quand on se rend dans l'hémisphère austral et qu'on vient de dépasser l'équateur, on aperçoit encore l'étoile polaire jusqu'à 5 ou 6° de latitude sud.

Forme sphérique de la Terre. — Détermination de la longitude et de la latitude. — Rayon de la Terre.

Forme sphérique de la Terre.

24. Première approximation.— *La Terre est un corps de dimensions finies, isolé dans l'espace.*

Ce fait est suffisamment démontré par les voyages autour du monde.

Ces voyages démontrent aussi que la surface de la Terre n'est pas plane. Nous allons voir que cette surface est *convexe*.

En effet, toutes les fois qu'un observateur est placé en un lieu exempt d'accidents de terrain, il aperçoit l'horizon terminé circulairement. Ceci ne peut s'expliquer que de deux manières différentes : 1° par la faiblesse de notre vue ; 2° parce que l'horizon sensible est formé par la ligne de séparation entre les parties visibles et les parties invisibles sur un globe partout convexe, cette ligne étant la courbe de contact d'un cône circonscrit dont le sommet serait à l'œil de l'observateur, et dont les génératrices seraient tangentes au globe terrestre.

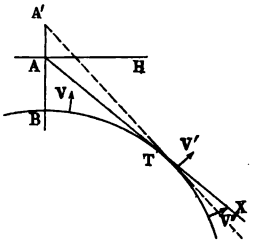
La première hypothèse n'est pas fondée ; si elle était exacte, à quelque hauteur qu'on s'élève en un lieu déterminé, le cercle de l'horizon se rétrécirait de plus en plus, au fur et à mesure qu'on s'élève ; or on sait que c'est le contraire qui arrive.

Voici d'ailleurs l'explication classique de la limite du champ visuel sur mer. Lorsqu'un vaisseau s'éloigne du port, un spectateur placé sur le rivage le voit peu à peu s'enfoncer sous l'horizon ; le corps du navire disparaît, puis les voiles inférieures, puis les hunes et enfin l'extrémité supérieure des mâts les plus élevés.

Pour revoir alors le navire, il suffit au spectateur de s'élever au-dessus du sol, et ce sont les sommets des mâts et les voiles supérieures qui reparaissent tout d'abord. Le phénomène se manifeste en sens inverse lorsque le vaisseau s'approche du port. L'hypothèse de la convexité de la mer explique seule ces apparences. En effet, à mesure que le vaisseau V s'éloigne du point A et atteint les positions V, V', V'', il descend progressivement au-dessous du plan tangent ATX et devient invisible en V'' ; mais si le spectateur s'élève en A', son horizon s'abaisse et il peut voir la partie la plus élevée du navire.

Dépression de l'horizon. — Considérons le plan horizontal AH qui passe par le point A. L'angle de AT avec AH, qui mesure la dépression de l'horizon, augmente avec la hauteur AB ; mais on a observé que, pour une hauteur donnée,

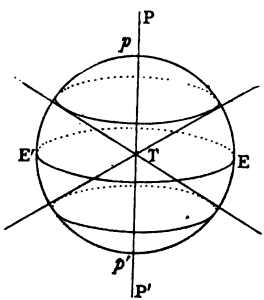
il est toujours le même, ce qui revient à dire que le cône formé par les tangentes telles que AT est un cône de révolution, c'est-à-dire un cône engendré par la révolution d'une droite AT autour d'une droite AB. Cette propriété caractérise la sphère. On peut donc conclure de là que *la Terre a sensiblement la forme sphérique.*



Comme vérification, on constate que dans les éclipses de lune l'ombre projetée de la Terre sur la Lune est terminée par un contour circulaire.

Détermination de la longitude et de la latitude.

25. La distance qui nous sépare des étoiles est immense. Aussi n'y a-t-il aucun inconvénient à prendre le centre de la Terre pour centre de la sphère céleste.



Axe, pôles. — L'axe du monde perce la surface de la Terre en deux points p, p' ; le point p situé sur l'axe du monde du même côté que le pôle P est le *pôle boréal* ou *pôle Nord ;* le point p' est le *pôle austral* ou encore *pôle Sud.*

Équateur, méridiens. — Le plan de l'équateur céleste passant par le centre de la Terre la coupe suivant un grand cercle qu'on appelle *équateur terrestre* ou encore *ligne équinoxiale.* Les hémisphères déterminés par l'équateur se nomment *hémisphère boréal* et *hémisphère austral,* du nom du pôle qu'ils contiennent.

Les plans des cercles horaires coupent la surface de la Terre suivant des grands cercles qui passent tous par les deux

pôles. Chaque grand cercle est divisé en deux demi-grands cercles par la ligne des pôles. Chaque demi-grand cercle s'appelle un méridien.

Parallèles terrestres. — Concevons un cône ayant pour sommet le centre de la Terre et pour base un parallèle céleste; il coupe la Terre suivant un petit cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe du monde. Ce petit cercle s'appelle un *parallèle terrestre.*

26. Position d'un point à la surface du globe. — Pour faire connaître la position d'un point à la surface du globe, il suffit d'indiquer sur quel méridien et sur quel parallèle il se trouve. Cela se traduit par deux nombres qu'on appelle les *coordonnées géographiques* du point. Nous conviendrons de prendre pour origine le méridien de Paris, et nous l'appellerons le *premier méridien.*

27. Longitude. — *On appelle longitude d'un point de la Terre l'angle dièdre que fait le plan du méridien de ce point avec le plan du premier méridien.*

Cet angle dièdre est mesuré par l'arc que les deux méridiens interceptent sur l'équateur terrestre.

Les longitudes se comptent de 0° à 360° sur l'équateur, en allant vers l'est, et par conséquent, en sens inverse des angles horaires.

Toutes les nations ne prennent pas pour origine le méridien de Paris; ainsi le premier méridien des Anglais passe par Greenwich; il est à 2°20'9",4 à l'ouest du méridien de Paris.

28. Latitude. — *On appelle latitude d'un point l'angle que la verticale du point fait avec le plan de l'équateur.* Cet angle se compte à partir de l'équateur de 0° à $\pm$ 90°, les points situés sur l'hémisphère boréal ayant des latitudes positives et les points situés sur l'hémisphère austral ayant des latitudes négatives. La latitude d'un point est mesurée par l'arc de méridien compris entre ce point et l'équateur.

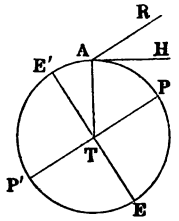
Tous les points d'un même parallèle ont même latitude. Tous les points d'un même méridien ont même longitude. Il ne faut pas oublier qu'un méridien n'est pas un cercle entier de la sphère, mais seulement un demi-cercle. L'autre moitié répond à une longitude qui diffère de 180°. La position d'un point sur le globe est évidemment déterminée quand on connaît sa longitude et sa latitude.

On voit d'après cela, qu'il y a la plus grande analogie entre les coordonnées géographiques que nous venons de définir, et l'ascension droite et la déclinaison.

29. Détermination de la latitude. — Nous nous appuierons sur le théorème suivant :

Théorème. — *La latitude d'un point est égale à la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon de ce point.*

Prenons pour plan de la figure le plan du méridien du point donné A ; soit PEP'E' ce méridien.



La latitude du point A est égale à l'angle E'TA ; menons par le point A la droite AH, tangente au cercle T. C'est la trace sur le plan de la figure de l'horizon du point A. Menons AR parallèle à TP et de même sens que TP.

Les angles aigus E'TA et HAR ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun ; ils sont donc égaux. D'ailleurs l'horizon est perpendiculaire au plan de la figure ; par conséquent l'angle HAR est la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon, la droite AH n'étant autre que la projection de AR sur l'horizon. Le théorème est donc démontré.

On a vu comment on pouvait obtenir la hauteur du pôle. On sait donc trouver la latitude d'un lieu partout où on a un théodolite et un sol fixe pour le placer.

30. Détermination de la longitude. — En chaque point de la Terre on fait partir l'heure sidérale du moment où l'origine des ascensions droites passe au méridien du lieu. Comme le point γ fait le tour de l'équateur céleste en 24 heures sidérales, les heures sidérales des différents points de la Terre ne sont pas toutes les mêmes.

Le point γ mettant 24 heures à décrire un arc de 360°, il décrit un arc de 15° en une heure, et en t heures un arc de $15^\circ \times t$.

Par conséquent, si on connaît la différence des heures de deux points de la Terre, en multipliant ce nombre par 15, on aura en degrés l'angle dont a tourné le point γ pour aller d'un méridien à l'autre, ou, ce qui revient au même, l'angle des deux méridiens.

On déduit de là deux méthodes pour déterminer les longitudes.

31. Méthode des chronomètres. — Les marins et les voyageurs en font un fréquent usage. Si un voyageur emporte avec lui un chronomètre bien réglé sur le temps sidéral de Paris, ce chronomètre lui donnera à chaque instant l'heure sidérale de Paris pendant tout son voyage. D'autre part, il lui sera toujours possible d'avoir l'heure sidérale du lieu où il se trouve. Ceci posé, s'il voit passer une étoile au méridien à $3^h30^m9^s$ heure locale, et que son chronomètre indique $3^h57^m28^s$, on voit d'abord que le lieu considéré est à l'ouest de Paris; comme à Paris la longitude est 0° ou 360°, on peut, pour rendre la soustraction possible, ajouter 24 heures à l'heure du second lieu, ce qui donne $27^h30^m9^s$. Nous en retranchons $3^h57^m28^s$; il reste $23^h32^m41^s$, ou, en degrés, minutes et secondes : 353°10'15".

C'est la longitude de Brest par rapport à Paris.

Le chronomètre est un instrument très délicat qui se dérange très facilement; aussi quand on veut avoir un peu de précision, on transporte plusieurs chronomètres ensemble et on prend la moyenne des heures de ceux qui paraissent avoir marché régulièrement.

32. Méthode des signaux instantanés. — Deux observateurs placés en deux stations différentes règlent leurs chronomètres sur la même étoile. A un moment donné, ils se font un signal et notent chacun l'heure. La différence des heures multipliée par 15 donne la différence des longitudes.

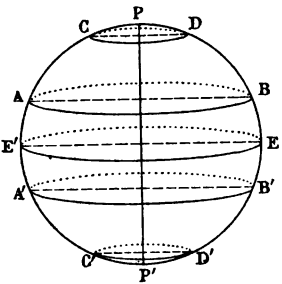
Si les deux postes sont reliés par un fil électrique, le mieux est de s'en servir pour faire le signal.

Lorsque c'est impossible, on emploie la méthode des signaux de feu. Le signal est produit par la combustion de quelques hectogrammes de poudre pendant la nuit, à une station intermédiaire. Elle produit une vive et subite clarté qui disparaît aussitôt.

33. Tropiques, cercles polaires, zones. — On appelle *tropiques* deux parallèles terrestres menés à la latitude de 23°27'30" environ; le tropique boréal AB se nomme *tropique du Cancer*; l'autre tropique A'B' est appelé *tropique du Capricorne*.

Les *cercles polaires* sont des parallèles terrestres dont la distance polaire est environ 23°27'30"; ils portent les noms de cercles polaires *arctique* et *antarctique*.

La zone comprise entre les deux tropiques se nomme *zone torride* ; les deux zones comprises entre chaque tropique et le cercle polaire correspondant se nomment *zones tempérées* ; enfin celles qui s'étendent du cercle polaire au pôle sont les *zones glaciales*.



Les surfaces de ces zones sont proportionnelles à leurs hauteurs que l'on peut facilement calculer. On trouve que la surface de la Terre étant prise pour unité, les zones torride, tempérées et glaciales ont respectivement pour étendue 0,40 ; 0,52 et 0,08.

Rayon de la Terre.

34. Méthode de calcul. — Soit R le rayon de la Terre supposée sphérique ; soit l la longueur d'un arc de grand cercle tracé à sa surface, et correspondant à un angle au centre de n degrés : on a la formule connue

$$l = \frac{\pi R n}{180},$$

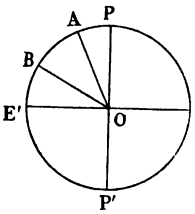
où π désigne le rapport de la circonférence au diamètre.

De cette formule, on tire

$$R = \frac{180 l}{n\pi}.$$

Donc, pour avoir R, il faut connaître l et n.

L'arc de grand cercle qu'on choisit est un arc de méridien.



Deux observateurs se placent l'un en A, l'autre en B, et déterminent les latitudes de ces points. Si, comme l'indique la figure, ces deux points sont dans un même hémisphère, l'angle AOB, c'est-à-dire n, est égal à la différence des latitudes des points A et B.

Reste à mesurer l'arc AB. Il suffit, pour cela, de choisir sur cet arc un certain nombre de stations suffisamment rapprochées, et de

mesurer les distances de ces stations successives ; leur somme donne la longueur de l'arc AB.

On a de la sorte tous les éléments nécessaires pour faire le calcul précédemment indiqué.

35. Longueur de l'arc de 1°. — Il y a un double intérêt à ce que la mesure de l'arc AB soit exacte : d'abord, pour bien connaître le rayon de la Terre, ensuite pour vérifier si notre globe est réellement sphérique.

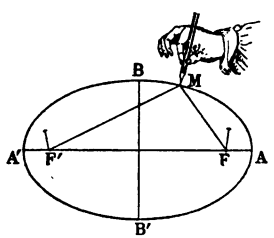
Aussi multiplia-t-on dès le siècle dernier les mesures d'arcs de méridien. Voici les premiers résultats sérieux que l'on obtint pour la longueur de l'arc de 1° :

Au Pérou	56750 toises,
En France	57070 toises,
En Laponie	57422 toises.

La première conclusion qui ressort de ces résultats, c'est que la Terre n'est pas parfaitement sphérique puisque l'arc de 1° n'a pas partout la même longueur, et que notre globe doit être légèrement aplati aux pôles et renflé à l'Equateur.

Les méridiens terrestres ne sont donc pas des cercles. On a pu, par des mesures précises, arriver à démontrer que ce sont des *ellipses* (*).

(*) On appelle *ellipse* une courbe plane, plus ou moins allongée, et telle que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes F et F′ de son plan appelés foyers, est égale à une longueur constante $2a$.



Pour tracer cette courbe d'une manière continue, on plante deux épingles aux foyers F et F′ et on fabrique avec du fil un contour fermé dont la longueur est égale à la distance FF′ augmentée de la longueur $2a$.

Ensuite, on tend le fil avec un crayon autour des points F et F′, et on promène la pointe du crayon sur le papier ; dans ce mouvement, elle trace l'ellipse.

L'ellipse possède deux axes de symétrie, AA′ et BB′. Elle se rapproche d'autant plus d'un cercle que la différence des longueurs de ces deux axes diminue.

$2a$ étant la longueur du grand axe, soit $2b$ la longueur du petit axe. On appelle *aplatissement* de l'ellipse le rapport $\frac{a-b}{a}$.

On fixa d'abord, pour valeur de l'aplatissement de ces ellipses, la fraction $\frac{1}{334}$.

36. Système métrique. — La mesure de l'arc de 1° permit de réformer le système des poids et mesures, en fournissant l'unité fondamentale de longueur.

Avant 1790, il y avait en France presque autant de systèmes différents de poids et mesures que de provinces différentes.

Les unités étaient choisies arbitrairement, et le système des multiples et des sous-multiples était parfois très compliqué.

L'Assemblée constituante nomma en 1790 une commission chargée de réformer le système entier des poids et mesures. Toutes les nations furent appelées à y concourir et à s'y faire représenter par leurs savants. Ce fut la *Commission du système métrique.*

Elle se proposa d'établir un système de poids et mesures satisfaisant aux deux conditions suivantes :

1° *L'unité fondamentale devait être une grandeur facile à retrouver, lors même que l'étalon en viendrait à être perdu ;*

2° *Les multiples et sous-multiples devaient se succéder conformément au système décimal.*

L'unité fondamentale de longueur choisie fut le *mètre*, qu'on définit comme étant égal à la dix-millionième partie du quart d'un méridien terrestre complet.

On construisit ensuite un *mètre-étalon* qui fut déposé aux Archives Nationales.

Plus récemment, on a encore mesuré des arcs de méridien, mais les résultats trouvés ne concordèrent pas tout à fait avec les résultats précédents.

La commission des poids et mesures a adopté une valeur trop faible de 440 toises pour la longueur du quart du méridien terrestre, et le mètre n'est plus la dix-millionième partie de ce quart d'ellipse. Sa valeur devrait être augmentée de 2 dixièmes de millimètre environ.

Mais il est possible que ces mesures, si précises soient-elles, soient dépassées par d'autres mesures encore plus précises. Si l'on s'en tenait à la définition légale du mètre, sa longueur serait donc incessamment variable avec les progrès de la géodésie, condition incompatible avec l'existence d'un étalon de mesure.

Aussi, dirons-nous dorénavant :

Le mètre, unité des mesures de longueur, est une longueur arbitraire : c'est la longueur, à 0°, d'une règle en platine déposée aux Archives nationales et qui équivaut à peu près à la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre.

37. Dimensions de la Terre. — Un astronome français, M. Faye, a discuté les mesures les plus récentes et a donné les chiffres suivants :

Quart du méridien elliptique.	10 002 008^{m}
Demi-grand axe	6 378 393^{m}
Demi-petit axe.	6 356 549^{m}
Surface de la Terre	510 082 000 kil. q.
Volume de la Terre	1 083 260 millions de kilomètres cubes.

L'aplatissement de la Terre (chiffre rectifié) est de $\frac{1}{292}$.

Lorsqu'il ne s'agit pas de calculs d'une grande précision, on prend pour circonférence de la Terre 40000 kilomètres.

Son rayon moyen est alors 6366 kilomètres.

Sa surface vaut 500 millions de kilomètres carrés.

Son volume vaut 1 trillion de kilomètres cubes.

Soleil. — Mouvement apparent sur la sphère céleste. — Ecliptique ; constellations zodiacales. — Saisons.

38. Observations du Soleil ; forme circulaire du disque solaire. — Pour faire une observation du Soleil avec une lunette, il faut que l'oculaire soit toujours recouvert d'un verre très foncé, afin d'adoucir l'éclat et la chaleur des rayons.

Cette précaution prise, on aperçoit l'image solaire sous la forme d'un disque circulaire, d'un diamètre sensible.

On vérifie que ce disque est exactement circulaire en mesurant les diamètres dans toutes les directions, et en constatant leur égalité.

A cet effet, on remplace le réticule ordinaire des lunettes par un réticule formé de deux fils parallèles, l'un fixe, et l'autre se déplaçant à l'aide d'une vis micrométrique. La tête de cette vis est graduée, et quand on la tourne, les graduations passent successivement devant un petit repère.

On amène l'image du Soleil à être tangente au fil fixe, et

on fait mouvoir le fil mobile, qui, à l'origine, coïncide avec le fil fixe, de manière à l'amener tangentiellement à l'image solaire, mais du côté opposé. On lit le nombre des divisions de la tête qui ont passé devant le repère.

Ensuite, on répète les mêmes opérations après avoir fait tourner l'oculaire de façon à donner aux fils une direction quelconque différente de la première. On trouve que le nombre des divisions de la tête ayant passé devant le repère, est toujours le même ; l'écartement des fils est donc resté constant, et comme il mesure le diamètre de l'image solaire perpendiculaire à la direction des fils, il s'ensuit que ce diamètre est constant et que l'image du Soleil est parfaitement circulaire.

39. Ascension droite et déclinaison du Soleil. — On appelle ascension droite et déclinaison du Soleil l'ascension droite et la déclinaison du centre de cet astre.

Ces deux coordonnées se mesurent, comme celles des étoiles, avec la lunette méridienne et le cercle mural.

Pour obtenir l'ascension droite, on remarque que quand le Soleil passe au méridien, les deux bords extrêmes de son image passent successivement par la croisée des fils de la lunette ; on note les instants de ces deux passages : leur moyenne arithmétique donne l'heure du passage du centre au méridien, et par suite, l'ascension droite de ce centre.

Pour la déclinaison, on observe d'abord la hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil, puis celle du bord inférieur ; leur demi-somme fournit la déclinaison du Soleil.

40. Mouvement apparent du Soleil sur la sphère céleste. — Il suffit d'observer plusieurs jours de suite à quel point de l'horizon le Soleil paraît se lever, et à quel point il paraît se coucher, pour voir que tantôt il se lève un peu plus au Nord, tantôt un peu plus au Sud ; il en est de même pour son coucher. Il paraît donc avoir un *mouvement en déclinaison* qui le rapproche successivement des deux pôles.

De plus, le point où le Soleil se lève n'est pas toujours dans la même constellation. Ainsi, dans les premiers jours de juin, le *Bélier* se lève peu de temps avant le Soleil. Un mois après, cette constellation s'est éloignée de l'est, et c'est le *Taureau* qui accompagne le lever du Soleil ; un mois après encore, les *Gémeaux* apparaissent à leur tour à la fin de la nuit. A ce moment, le Taureau, et encore plus le Bélier, sont

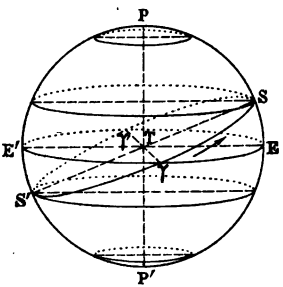
assez élevés au-dessus de l'horizon. Cela nous montre que le Soleil paraît avoir un *mouvement en ascension droite*, dirigé en sens inverse du mouvement diurne. La combinaison de ces deux mouvements constitue le mouvement apparent du Soleil sur la sphère céleste.

41. Écliptique. — Si on détermine chaque jour à la même heure les coordonnées du Soleil, et si on marque sur un globe les positions apparentes du Soleil qui y correspondent, on voit que la ligne continue qui joint toutes ces positions est un grand cercle de la sphère céleste. Ce grand cercle porte le nom d'*écliptique*.

L'écliptique est complètement déterminé lorsqu'on connaît son intersection avec le plan de l'équateur et son inclinaison sur ce dernier plan.

Soient γ et γ' les points d'intersection de l'écliptique avec l'équateur. Les points γ et γ' s'appellent les *points équinoxiaux*. Le moment où le Soleil traverse l'équateur en allant de l'hémisphère austral à l'hémisphère boréal s'appelle l'*équinoxe du printemps*. Le point correspondant est le point γ ; on l'appelle *point vernal*. Le moment où le Soleil passe par le point γ' s'appelle l'*équinoxe d'automne*.

Considérons la sphère céleste et faisons passer par l'axe du monde un plan perpendiculaire à la ligne des équinoxes. Ce plan détermine sur la sphère céleste un grand cercle PSP'S' perpendiculaire à la fois à l'équateur et à l'écliptique. L'arc SE compté sur ce cercle mesure l'angle STE qui est l'angle du plan de l'écliptique avec le plan de l'équateur, ou, comme on dit encore, l'*obliquité de l'écliptique*. Cet angle est manifestement égal à la plus grande déclinaison du Soleil.



Le diamètre SS' se nomme la *ligne des solstices*. Le point S situé dans l'hémisphère boréal est le *solstice d'été*, le point S' est le *solstice d'hiver*.

Les parallèles célestes qui passent par les points S et S' se nomment, l'un le *tropique du Cancer*, l'autre le *tropique du Capricorne*.

Les *cercles polaires* célestes sont des parallèles célestes dont la distance polaire est égale à la distance des tropiques à l'équateur.

42. Origine des ascensions droites. — Le point γ que nous venons ainsi de déterminer a été choisi par les astronomes pour origine des ascensions droites. Lorsque ce point de la sphère céleste passe au méridien d'un lieu quelconque, la pendule sidérale de ce lieu doit marquer $0^h0^m0^s$; c'est là le commencement conventionnel du jour sidéral.

43. Obliquité de l'écliptique. — Si le solstice avait lieu au moment où le Soleil passe au méridien, il suffirait de mesurer sa hauteur méridienne ; on en conclurait sa déclinaison, qui serait précisément égale à l'obliquité de l'écliptique.

On ne peut pas compter là-dessus, mais on remarque qu'à l'époque du solstice la hauteur méridienne du Soleil varie peu d'un jour à l'autre, parce que la tangente à l'écliptique au point S est parallèle à l'équateur ; il suffit donc, comme première approximation, de prendre la plus grande déclinaison observée comme mesure de l'obliquité. On a trouvé ainsi $23°27'14'',9$. Donc : *le Soleil paraît décrire autour de la Terre, de l'ouest à l'est, un grand cercle de la sphère céleste dont le plan est incliné de* $23°27'15''$ *environ sur celui de l'équateur.*

44. Constellations zodiacales. — D'après ce qui précède, on voit que la route suivie par le Soleil à travers les étoiles est toujours la même. Les premiers observateurs, dépourvus de tout instrument, notaient soigneusement les levers et les couchers, mais employaient les étoiles comme points de repère. Ils s'attachèrent à grouper les étoiles sur lesquelles reparaît constamment le Soleil, en constellations distribuées comme des repères le long de l'écliptique, et ils leur donnèrent les noms suivants :

le Bélier,	le Cancer,	la Balance,	le Capricorne,
le Taureau,	le Lion,	le Scorpion,	le Verseau,
les Gémeaux,	la Vierge,	le Sagittaire,	les Poissons.

Chaque constellation était censée répondre à un des douzièmes de l'écliptique, en sorte que le Soleil les traversait de mois en mois.

Toute la théorie du Soleil a consisté longtemps à pouvoir

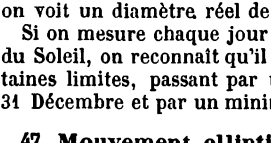
assigner la date à laquelle il se trouve dans l'un de ces signes.

Les douze constellations qui répondent aux douzièmes de l'écliptique occupent sur la sphère une zone étroite portant le nom de *zodiaque* (d'un mot grec qui veut dire animaux). On lui donne $8^\circ \frac{1}{2}$ de largeur de chaque côté de l'écliptique, en tout 17°.

Les anciens avaient fort bien remarqué que les planètes ne s'écartent jamais de cette zone, dont le Soleil parcourt le milieu. Ce fait tient, comme nous le verrons plus tard, à la forme générale du système solaire et à la place que nous y occupons.

45. Année tropique. — On appelle année tropique l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux équinoxes consécutifs du printemps. Elle vaut environ $365^j \frac{1}{4}$. Elle constitue ce qu'on appelle l'année.

46. Diamètre apparent du Soleil. — On appelle *diamètre apparent* d'une droite AB l'angle AOB sous lequel un observateur placé en O voit cette droite.



Si la droite AB s'éloigne du point O en restant perpendiculaire à OC, son diamètre apparent diminue. Il augmente au contraire lorsque la droite AB se rapproche de O.

On appelle *diamètre apparent d'un astre* l'angle sous lequel on voit un diamètre réel de cet astre.

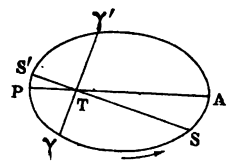
Si on mesure chaque jour de l'année le diamètre apparent du Soleil, on reconnaît qu'il varie périodiquement entre certaines limites, passant par un maximum de 32'36",4 vers le 31 Décembre et par un minimum de 31'32" vers le 1er Juillet.

47. Mouvement elliptique du Soleil. — Puisque le diamètre apparent du Soleil varie, c'est que cet astre ne reste pas toujours à la même distance de la Terre. Il s'en rapproche le plus au mois de Janvier, et s'en éloigne le plus au mois de Juillet.

En mesurant avec précision les diamètres apparents du Soleil, chaque jour de l'année, on a pu trouver que *cet astre décrit, dans le plan de l'écliptique, une ellipse dont la Terre occupe un des foyers.* Képler, qui découvrit ce mouvement elliptique du Soleil, trouva aussi la loi suivante, connue sous le nom de *loi des aires :*

Les aires balayées par la droite qui joint le centre de la Terre au centre du Soleil, sont proportionnelles aux temps employés à les balayer.

Le point P où la distance du Soleil à la Terre est la plus petite se nomme *périgée* ou *périhélie*, selon qu'on parle du Soleil ou de la Terre, et le point A où la distance de la Terre au Soleil est la plus grande se nomme *apogée* ou *aphélie.*



La ligne AP se nomme la *ligne des apsides.* C'est le grand axe de l'ellipse.

Si nous marquons sur l'orbite solaire les points équinoxiaux γ et γ', et les points solsticiaux S et S', on trouve que la ligne SS' est un peu inclinée sur l'axe AP.

48. Distance du Soleil à la Terre ; son rayon. — Désignons par R le rayon de la Terre. La *distance moyenne* du Soleil à la Terre est égale à 23280 R.

Le rayon du Soleil est égal à 108 R.

49. Saisons. — Les solstices et les équinoxes déterminent quatre époques qui servent à diviser l'année en quatre parties appelées saisons.

La première, qui s'étend de l'équinoxe du printemps au solstice d'été, ou du 20 mars au 21 juin, s'appelle le *Printemps.*

La deuxième, du solstice d'été à l'équinoxe d'automne, ou du 21 juin au 23 septembre, est l'*Eté.*

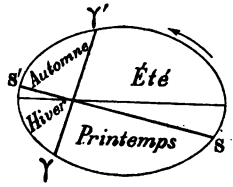
La troisième, de l'équinoxe d'automne au solstice d'hiver, ou du 23 septembre au 22 décembre, est l'*Automne.*

La quatrième, du solstice d'hiver à l'équinoxe du printemps, ou du 22 décembre au 20 mars, est l'*Hiver.*

Les quatre saisons n'ont pas la même durée :

Le Printemps dure 92 jours 21^h, l'Eté 93 jours 14^h, l'Automne 89 jours 18^h et l'Hiver 89 jours 1^h.

Ainsi l'Été est la plus longue, l'Hiver la plus courte, et le Printemps est plus long que l'Automne.



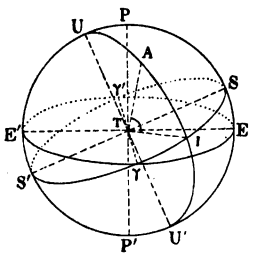
Voici pourquoi : d'après la loi des aires, les segments qui correspondent aux quatre saisons ont des aires proportionnelles à leurs durées.

Or, on voit immédiatement sur la figure que le Printemps et l'Eté sont plus longs que l'Hiver. De plus, le grand axe de l'ellipse tombant dans le segment de l'Eté, on conçoit que ce segment ait une aire supérieure à celle du Printemps.

50. Longitude et latitude célestes. — Dans l'étude du système solaire, les astronomes ont adopté un nouveau système de coordonnées où le plan de l'écliptique joue un rôle fondamental : ces coordonnées sont les *longitudes* et les *latitudes célestes*.

Considérons un axe TU perpendiculaire au plan de l'écliptique.

On appelle *longitude céleste* d'un astre A l'angle que fait un grand cercle passant par l'astre et contenant la droite TU avec un grand cercle dont le plan passe également par TU et par le point γ.



On appelle *latitude céleste* d'un astre A l'angle que fait le rayon TA avec le plan de l'écliptique. Elle est mesurée par l'arc de grand cercle IA. — Tous les points situés dans le même hémisphère que le pôle P par rapport au plan de l'écliptique ont des *latitudes boréales* ; les autres ont des *latitudes australes*.

La ligne γγ' n'est pas rigoureusement fixe dans le plan de l'écliptique. Elle est animée d'un mouvement rétrograde et fait un tour entier en 26 000 ans environ. Ce mouvement a pour effet d'avancer très légèrement chaque année le

moment de l'équinoxe du printemps. Ce phénomène est connu sous le nom de *précession des équinoxes*. On l'explique en admettant que l'axe du monde tourne autour de la droite TU en 26000 ans.

La Lune. — Ses phases.

51. Mouvement propre de la Lune. — Comme le Soleil, la Lune, qui participe au mouvement diurne, possède un mouvement propre, qui s'effectue dans le même sens que celui du Soleil, mais avec une vitesse environ treize fois plus grande. Il en résulte que, tandis que le Soleil se lève chaque jour avec un retard d'environ 4 minutes sur les étoiles, la Lune se lève avec un retard d'environ 50 minutes 30 secondes.

52. Orbite lunaire. — La Lune paraît, dans son mouvement propre, décrire sur la sphère céleste un grand cercle appelé *orbite lunaire*. Son plan est incliné d'environ 5° sur le plan de l'écliptique.

Les points d'intersection de l'orbite lunaire avec l'écliptique se nomment des *nœuds*.

La ligne des nœuds, comme celle des équinoxes, est animée d'un mouvement rétrograde et fait un tour complet dans le plan de l'écliptique en 18 ans $\frac{2}{3}$ environ.

53. Conjonction, opposition. — On dit que la Lune et le Soleil sont en *conjonction* lorsque ces deux astres ont la même longitude céleste.

On dit que la Lune et le Soleil sont en *opposition* lorsque les longitudes célestes de ces deux astres diffèrent de 180°.

54. Révolution sidérale de la Lune. — On appelle *révolution sidérale* de la Lune le temps qu'elle met à parcourir son orbite. Il est de 27^j8^h environ, de sorte qu'en un jour la Lune parcourt sur son orbite un arc d'environ $13°10'30''$.

55. Révolution synodique. — On appelle révolution *synodique de la Lune*, ou encore *lunaison*, le temps qui sépare deux conjonctions ou deux oppositions consécutives. Si le Soleil n'avait pas de mouvement propre, la révolution sidérale serait égale à la révolution synodique. L'effet du

mouvement propre du Soleil est d'augmenter un peu la durée de la révolution synodique, qui est d'environ 29^j13^h.

56. Éléments de la Lune. — La valeur moyenne du diamètre apparent de la Lune est de 31'.

R désignant toujours le rayon de la Terre, la distance moyenne de la Lune à la Terre est 60R, ce qui fait 385 000 kilomètres. On voit par là que, si on imagine une sphère ayant pour centre le centre de la Terre et d'un rayon égal à celui du Soleil (108R), la Lune est toujours à l'intérieur de cette sphère.

Le rayon de la Lune est à peu près égal aux $\frac{3}{11}$ du rayon terrestre.

57. Rotation de la Lune sur elle-même. — La Lune tourne sur elle-même, et ce mouvement a lieu dans le même sens et dans le même temps que sa révolution autour de la Terre. La conséquence de cette rotation, c'est que nous n'apercevons jamais qu'une même moitié de la Lune.

58. Constitution physique de la Lune. — On s'accorde jusqu'à présent à admettre que la Lune n'a ni eau ni atmosphère. Sa surface est couverte de hautes montagnes, qui sont la cause des taches qu'on aperçoit dans les parties éclairées de la Lune et des points brillants qu'on voit dans les parties obscures.

Phases de la Lune.

59. Description des phases. — Quand la lune passe au méridien vers minuit, nous l'apercevons sous la forme d'un disque complètement lumineux : c'est la *pleine lune* (*fig.* 1). Les nuits suivantes, elle passe au méridien après minuit, et de plus en plus tard ; on remarque en outre que son bord de droite s'efface de plus en plus (*fig.* 2).

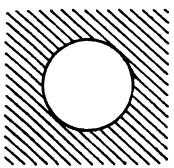


Fig. 1

A peu près vers la septième nuit, on n'aperçoit plus qu'un demi-cercle lumineux (*fig.* 3); la Lune passe au méridien vers 6 heures du matin ; elle n'éclaire que la seconde partie de la nuit, et on

l'aperçoit encore à l'ouest après le lever du Soleil, c'est le *dernier quartier*.

Les nuits suivantes, le disque se rétrécit pour prendre la forme d'un croissant qui s'amincit de plus en plus, et tourne

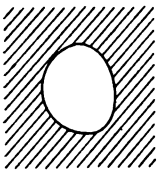


Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

sa convexité vers le Soleil levant (*fig.* 4). La Lune passe au méridien de plus en plus tard, de sorte que vers le 13e jour son lever précède de peu celui du Soleil et qu'elle n'apparaît plus que comme un mince filet lumineux.

Le lendemain ou le surlendemain, c'est-à-dire du quatorzième au quinzième jour, on cesse entièrement de voir la Lune : c'est l'époque de la *néoménie* ou *nouvelle lune*. Quelques jours après, on la voit reparaître à l'ouest peu après le

Fig. 5

Fig. 6

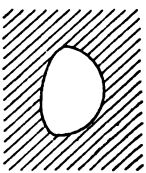


Fig. 7

coucher du Soleil sous forme d'un croissant très délié, tournant sa convexité vers le Soleil couchant (*fig.* 5). Elle passe au méridien après midi, et de plus en plus tard.

Vers le vingt-deuxième jour, la Lune prend de nouveau la forme d'un demi-cercle qui tournerait cette fois sa convexité vers le Soleil couchant (*fig.* 6). Elle passe au méridien vers 6 heures du soir et se couche vers minuit. C'est le *premier*

quartier. Les jours suivants, la surface lumineuse va en croissant comme l'indique la figure.

Enfin, vers le 27e jour, la surface lumineuse de la Lune est de nouveau circulaire.

L'ensemble de tous ces aspects constitue les *phases* de la Lune. La nouvelle et la pleine lune portent le nom de *syzygies*.; le premier et le dernier quartier celui de *quadratures*.

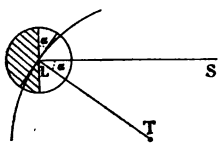
On appelle *lunaison* la durée d'une période complète des phases.

On fait commencer la lunaison à la nouvelle lune. Le nombre de jours écoulés depuis la dernière nouvelle lune est l'âge de la Lune. Il est représenté par les nombres entiers de 1 à 28.

Nous remarquerons que la ligne des cornes accomplit pendant une lunaison un tour complet dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre.

60. Explication des phases. — On comprend parfaitement les phénomènes qui viennent d'être décrits, en considérant que la Lune est un corps sensiblement sphérique, opaque, non lumineux par lui-même, qui réfléchit la lumière qu'il reçoit du Soleil, et qui tourne autour de la Terre dans un plan peu incliné sur l'écliptique, avec une vitesse constante, à peu près en un mois, et enfin, que la Lune est beaucoup plus près de nous que le Soleil.

Admettons, pour plus de simplicité, que la Lune se meuve dans le plan de l'écliptique. Soient T la position de la Terre, et SL la direction des rayons solaires, que l'on peut regarder comme parallèles entre eux, à cause de la grande distance du Soleil.

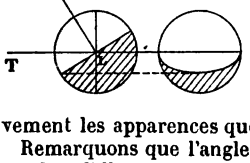


Pour obtenir la partie éclairée de la Lune, on mène par son centre un plan perpendiculaire à la direction des rayons solaires ; il coupe la Lune suivant un grand cercle qui est le *cercle d'illumination*.

La partie de la Lune visible de la Terre s'obtient de la même façon en menant par le centre de la Lune un plan perpendiculaire à la droite qui joint le centre de la Lune au

centre de la Terre. Ce plan coupe la Lune suivant un grand cercle qui est le cercle de contour apparent.

Le cercle d'illumination se projette sur le plan du cercle de contour apparent suivant une ellipse qui sépare la partie éclairée de la partie obscure de la Lune.



On voit alors que si on suppose que la Lune se déplace sur son orbite, on aperçoit successivement les apparences que nous avons indiquées.

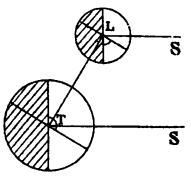
Remarquons que l'angle α que font entre eux les plans des cercles d'illumination et de contour apparent, est égal à l'angle SLT que fait la ligne joignant le centre de la Terre à celui de la Lune avec la direction des rayons solaires.

Lorsque cet angle est nul, le cercle d'illumination et le cercle de contour apparent coïncident, et la Lune tourne sa partie éclairée vers la Terre ; il y a *pleine lune*.

Ensuite, l'angle des deux cercles augmente, devient droit au moment du *dernier quartier*, puis il devient obtus, et enfin il est égal à deux droits au moment de la *nouvelle lune*. En continuant, on arrive au *premier quartier*, pour revenir à la pleine lune, en passant successivement par toutes les phases.

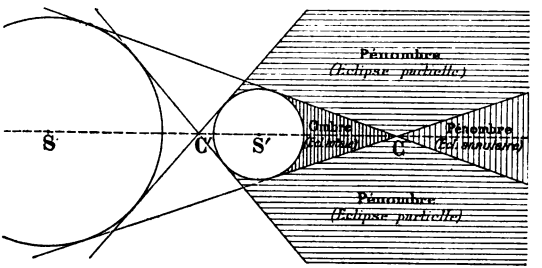
61. Lumière cendrée. — Pendant les quelques jours qui précèdent le premier quartier, alors que la partie éclairée de la Lune visible pour nous n'est encore qu'un mince croissant, on peut voir après une observation attentive le reste du disque éclairé par une lumière très faible. Ce curieux phénomène, qui peut être commodément observé surtout au printemps ou à l'automne, parce que le crépuscule dure moins dans ces saisons, s'atténue à mesure que le croissant augmente ; il disparaît avant le premier quartier. L'explication en est très simple : la Terre est une sorte de Lune pour son satellite ; elle en éclaire les nuits, et sur la Lune, il fait clair de terre tout comme il fait clair de lune sur la Terre. C'est cette illumination réflexe que nous voyons lorsque le Soleil est couché, et si nous remarquons mieux ce phénomène, connu sous le nom de *lumière cendrée*, au moment de la nouvelle lune, c'est qu'à cette époque il y a pleine terre pour la Lune.

Il suffit en effet de se reporter à la figure pour voir que les phases de la Lune et les phases de la Terre sont supplémentaires. On voit que les cercles d'illumination et les cercles de contour apparent ont leurs plans parallèles deux à deux ; comme, de plus, le Soleil ne s'interpose jamais entre la Lune et la Terre, les hémisphères terrestre et lunaire limités par les cercles d'illumination et qui tournent leur convexité l'un vers l'autre, sont toujours, l'un éclairé et l'autre obscur, ou inversement.



Éclipses de Lune et de Soleil.

62. **Ombre et pénombre.** — Considérons deux sphères, la première, S, lumineuse, et la seconde, S', obscure et opaque. La sphère S' projette derrière elle un cône de sommet C circonscrit à la fois aux sphères S et S'. Tout point



intérieur à ce cône et situé derrière S' est dans l'obscurité par rapport à la surface S, c'est-à-dire qu'il ne reçoit aucun rayon lumineux venant de S. Le cône C s'appelle le cône d'*ombre*.

Il existe un second cône circonscrit aux sphères S et S' et dont le sommet C' est entre S et S'. Un point intérieur à ce cône situé dans la région couverte de hachures claires reçoit une partie seulement des rayons lumineux envoyés par la surface S. Une partie, en effet, rencontre la sphère S' avant

d'arriver au point. On appelle *pénombre* la région correspondante de l'espace. Enfin, un observateur placé en un point pris à l'intérieur de la seconde nappe du cône d'ombre, voit la sphère S' se projeter comme un disque noir sur la sphère S, dont il n'aperçoit plus qu'une portion brillante offrant la forme d'une couronne circulaire.

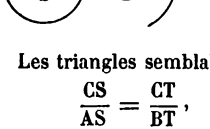
Éclipses de Lune.

63. Production de l'éclipse de Lune. — Le Soleil éclairant la Terre, celle-ci détermine un cône d'ombre et une région de pénombre. Il y a *éclipse de Lune* lorsque la Lune est située en totalité ou en partie dans le cône d'ombre. Si la Lune est en totalité dans le cône d'ombre, on dit que l'éclipse est *totale*. Dans ce cas, notre satellite est invisible de tous les points de la Terre.

Si la Lune ne pénètre qu'en partie dans le cône d'ombre, il y a *éclipse partielle*.

Si la Lune est dans la région de pénombre, son éclat diminue un peu, puisque la Terre intercepte une partie des rayons qu'elle reçoit du Soleil, mais il n'y a pas, à proprement parler, d'éclipse.

64. Conditions de possibilité d'une éclipse de Lune. — Cherchons d'abord la longueur du cône d'ombre à partir du centre de la Terre. Soient l la distance du centre du Soleil au centre de la Terre, R et r les rayons respectifs de ces deux astres, et x la longueur du cône d'ombre pure comptée à partir du centre de la Terre.



Les triangles semblables CAS et CBT donnent

$$\frac{CS}{AS} = \frac{CT}{BT}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{CS - CT}{AS - BT} = \frac{CT}{BT},$$

c'est-à-dire $$\frac{l}{R - r} = \frac{x}{r};$$

on tire de là $$x = l \times \frac{r}{R - r}.$$

Or, on a $R = 108r$, $l = 23280r$;

donc $x = 215r$, environ.

La distance moyenne de la Terre à la Lune étant $60r$, le cône d'ombre s'étend bien au-delà de l'orbite de la Lune, et celle-ci peut y pénétrer au cours de sa révolution synodique.

Elle y pénétrerait même à chaque conjonction si le plan de l'orbite lunaire coïncidait avec celui de l'écliptique, car alors les centres des trois astres seraient rigoureusement en ligne droite au moment d'une conjonction. Il n'en est pas ainsi en réalité, et les centres des trois astres ne peuvent être en ligne droite que si, au moment de la pleine lune, notre satellite est venu en un de ses nœuds. Il y a alors éclipse. Il peut encore y avoir éclipse lorsque la Lune, sans être en un nœud, est cependant assez voisine de la ligne des nœuds au moment d'une conjonction. On a trouvé par le calcul qu'il y a sûrement éclipse de Lune au moment d'une conjonction, toutes les fois que la latitude de la Lune est inférieure à $52'26'',8$.

Pour que l'éclipse de Lune soit totale, il faut de plus qu'à la distance où la Lune traverse le cône d'ombre, la section circulaire faite dans ce cône présente un diamètre apparent au moins égal à celui du satellite.

Cette dernière condition se trouve réalisée, mais nous n'entrerons pas dans le détail des calculs qui permettent de l'affirmer.

65. Phases de l'éclipse. — Pendant une éclipse de lune, le disque lunaire disparaît peu à peu, en présentant à peu près les mêmes phases que pendant une lunaison, avec cette différence, que les deux arcs limitant la partie éclairée de la lune sont circulaires, et qu'ils tournent toujours leur convexité du même côté.

Le maximum de la durée d'une *éclipse totale* est environ de 2 heures; le maximum de la *durée totale* d'une éclipse, depuis l'entrée dans l'ombre jusqu'à la sortie de l'ombre, est de 4 heures.

Une éclipse de lune est visible à un instant donné de tous les points de l'hémisphère terrestre pour lesquels la lune est au-dessus de l'horizon.

En réalité, la Lune ne cesse pas d'être éclairée faiblement, même au milieu d'une éclipse totale, et elle apparaît avec une lueur rougeâtre. Cela tient à la réfraction atmosphérique, qui a pour effet de diminuer la longueur du cône d'ombre, et à l'existence de vapeur d'eau dans les couches atmosphériques voisines du sol.

Éclipses de Soleil.

66. Production et possibilité. — Lorsque la Lune, dans son mouvement autour de la Terre, vient à s'interposer entre le Soleil et l'œil de l'observateur, elle intercepte, par suite de son opacité, une certaine partie des rayons solaires. Il y a *éclipse de Soleil.*

En construisant comme précédemment le cône d'ombre pure et le cône de pénombre de la Lune, on voit qu'il y a *éclipse totale* pour un point de la Terre lorsque ce point est dans le cône d'ombre pure de la Lune ; s'il est seulement dans le cône de pénombre, il reçoit encore une certaine partie de la lumière solaire. On dit qu'il y a *éclipse partielle.*

Désignons par d la distance du centre de la Lune au centre du Soleil, au moment où la Lune est entre le Soleil et la Terre. Appelons ρ le rayon de la Lune et z la longueur du cône d'ombre pure.

Un calcul analogue à celui qui a été fait pour les éclipses de Lune donne

$$z = d \times \frac{\rho}{R - \rho}.$$

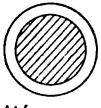
Remplaçant d, ρ et R par leurs valeurs en fonction du rayon de la Terre, r, on trouve que z est égal à $58r$ environ.

La distance moyenne de la Lune à la Terre étant $60r$, il semblerait qu'une éclipse totale fût impossible. Mais cette distance de la Lune à la Terre est une valeur moyenne : la valeur minimum est $57r$ et la valeur maximum $64r$, de sorte que z est compris entre $57r$ et $59r$, et on en conclut qu'il peut y avoir éclipse totale de Soleil.

Comme dans le cas des éclipses de Lune, il ne faut pas que la Lune soit trop éloignée de la ligne des nœuds au moment d'une conjonction.

Une éclipse de Soleil est certaine lorsque la latitude de la Lune est inférieure à 1°24'31".

Lorsque la Lune est à l'apogée, l'éclipse totale n'a lieu pour aucun point de la surface de la Terre ; mais aux points de la Terre situés dans le voisinage de l'axe du cône d'ombre, on peut observer un phénomène particulier : le diamètre apparent du Soleil est plus grand que celui de la Lune ; on voit le bord du Soleil dépasser de tous côtés comme un anneau le disque de la Lune ; l'éclipse est *annulaire.*



67. Phases de l'éclipse. — La durée d'une éclipse de Soleil est au plus de six heures.

C'est toujours par le bord oriental de la Lune que commencent les éclipses de Soleil ou de Lune, car c'est par l'excès de vitesse de la Lune sur le Soleil que la Lune atteint soit le disque solaire, soit le cône d'ombre pure de la Terre; elle les traverse de l'ouest à l'est et finit par les dépasser.

Quand le bord occidental du Soleil paraît entamé par la Lune, la clarté du jour diminue peu à peu, pour disparaître lorsque le Soleil est complètement masqué. A ce moment, la température ambiante s'abaisse notablement, et l'impression du froid jointe à celle de l'obscurité donne la raison du malaise qu'on éprouve généralement au moment d'une éclipse de Soleil. La nuit n'est cependant pas complète, il se forme autour du disque noir de la Lune une auréole (la *couronne*) qui répand une faible clarté sur les objets environnants. Ce phénomène est encore inexpliqué. L'éclipse totale dure peu; au bout de quelques minutes, la lumière reparaît et le disque du Soleil reparaît progressivement.

Les éclipses de Soleil sont des phénomènes beaucoup plus précis que les éclipses de Lune, parce que la Lune n'a pas d'atmosphère et que tout se passe, à peu près, comme s'il s'agissait du contact géométrique de deux cercles.

68. Fréquence des éclipses de Lune et de Soleil. — Tandis qu'une éclipse de Lune est visible de tous les points d'un hémisphère terrestre, et que ses phases sont les mêmes au même moment pour tous les observateurs, il n'en est pas de même d'une éclipse de Soleil. Cela tient évidemment à ce que deux observateurs placés en deux lieux différents ne sont pas éclairés de la même façon par le Soleil.

De plus, les lieux de la Terre pour lesquels il peut y avoir éclipse de Lune, et qui sont ceux où le cône d'ombre de la Lune rencontre la Terre, ne forment jamais qu'une portion restreinte de la surface terrestre.

Aussi, bien que la limite de latitude trouvée pour les éclipses de Soleil soit supérieure à celle trouvée pour les éclipses de Lune, les premières sont-elles plus rares que les secondes.

Dans un lieu déterminé, on voit environ trois fois moins d'éclipses de Soleil que de Lune.

Les éclipses totales de Soleil sont rares en un lieu déterminé.

Il n'y en a pas eu à Paris depuis 1724, et il n'y en aura pas avant l'an 2026.

Dans une année, il y a au plus sept éclipses, et au moins deux ; en moyenne, il y en a quatre.

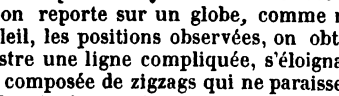
Pour toute la Terre, il y a douze éclipses totales dans le XIXe siècle.

Description générale du système solaire. — Planètes et leurs satellites. — Système de Kopernik. — Détails succincts sur les diverses planètes.

69. Existence des planètes. — Le Soleil et la Lune ne sont pas les seuls astres qui paraissent posséder un mouvement propre. Il existe encore d'autres astres, les uns visibles à l'œil nu, les autres au télescope seulement, qui nous semblent se déplacer sur la sphère céleste par rapport aux étoiles. Parmi ceux-ci, certains ont un diamètre apparent sensible, un éclat mat et sont dépourvus de scintillation ; enfin quelques-uns présentent même des phases analogues à celles de la Lune. Ce sont les planètes.

Leurs mouvements apparents sont très irréguliers. Si on observe plusieurs jours de suite une planète déterminée, et si on reporte sur un globe, comme nous avons fait pour le Soleil, les positions observées, on obtient pour trajectoire de l'astre une ligne compliquée, s'éloignant peu de l'écliptique, et composée de zigzags qui ne paraissent suivre aucune loi.

La planète va de F en E, s'arrête un instant en E, rétrograde de E en D puis repart pour aller en C, et ainsi de suite ; et chaque station précède un changement dans le sens du mouvement. De plus, les rétrogradations sont plus faibles que les lignes parcourues dans le sens direct ; ainsi DE est plus petit que FE. Cela tient à ce que la Terre n'est pas le centre du mouvement des planètes, et qu'elles ne se déplacent pas dans le plan de l'écliptique.



Si on pouvait les observer du centre du Soleil, on les verrait tourner de l'ouest à l'est dans des orbites planes, à peu

près circulaires, et dont les plans seraient fort peu inclinés sur celui de l'écliptique.

70. **Système solaire.** — En dehors de la Terre, on compte sept planètes principales : *Mercure*, *Vénus*, *Mars*, *Jupiter*, *Saturne*, *Uranus* et *Neptune*, en commençant par les plus rapprochées du Soleil.

Mercure et Vénus, plus rapprochées du Soleil que la Terre, sont des *planètes inférieures* ; les autres, au contraire plus éloignées, sont des *planètes supérieures*.

Entre Mars et Jupiter, on a découvert un grand nombre de petites planètes invisibles à l'œil nu et que, pour cette raison, on a appelées *planètes télescopiques*.

Quelques planètes possèdent un et même plusieurs satellites qui tournent autour d'elles comme la Lune autour de la Terre.

Tous ces corps, en y joignant la Terre et la Lune, constituent le *système solaire*.

C'est le système solaire que nous connaissons le mieux de tout l'Univers. Il a pour nous une importance considérable, et on peut dire que le mouvement de la Terre est influencé par tous les astres qui le constituent.

Le rôle du Soleil dans tout l'Univers est-il aussi important que dans le système solaire ? Il ne faudrait pas le croire. Les distances du Soleil aux étoiles les plus voisines sont si grandes que les dimensions de notre système ne sont, en comparaison, que des nombres insignifiants, et le Soleil ne peut guère exercer d'influence appréciable sur les étoiles.

Le Soleil est si peu le centre du monde qu'il n'est pas fixe. Une étude minutieuse de son mouvement sur la sphère céleste permet d'affirmer qu'il se dirige vers la constellation d'Hercule, entraînant avec lui la Terre et les planètes dans un mouvement de translation sensiblement rectiligne.

71. **Système de Kopernik.** — Les Anciens faisaient de la Terre le centre du monde, et leur cosmographie par là même était très compliquée, surtout lorsqu'il s'agissait d'expliquer les mouvements des planètes.

C'est *Kopernik* qui montra le premier quelle était la véritable constitution du système solaire. Avec lui, le Soleil est remis à la place véritable qu'il occupe dans notre monde : il en est le centre. Autour de cet astre tournent dans l'ordre

de leurs distances Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter et Saturne.

Depuis Kopernik on a découvert Uranus et Neptune, qui tournent aussi autour du Soleil, ainsi que les planètes télescopiques. Quant à la Lune, elle perd beaucoup de l'importance que lui attribuaient les Anciens dans leurs conceptions, et de planète qu'elle était, elle redescend au rang de simple satellite de la Terre.

72. Explication de l'erreur des Anciens. — Cherchons maintenant pourquoi ces idées si simples, que l'antiquité connaissait pourtant depuis les Pythagoriciens, ont mis si longtemps à triompher de l'erreur.

La première cause et la plus importante, sans contredit, tient à ce que nous sommes constamment exposés à être dupes de nos sens.

La Terre nous semblait immobile, les étoiles paraissaient tourner autour de nous : fatalement, nous étions amenés à supposer la Terre fixe et les cieux mobiles.

Cependant, nous connaissions un certain nombre d'illusions du même genre.

Quand on descend une rivière en bateau et qu'on regarde les rives, il semble qu'on les voit fuir dans le sens opposé à celui du courant, pendant que le bateau reste immobile. La même chose arrive lorsqu'on se met à la portière d'un wagon en marche.

D'ailleurs, l'illusion inverse se présente aussi fréquemment. Quand on s'accoude au pont d'une rivière pour voir couler l'eau, il semble, au bout de très peu de temps, que le pont avance rapidement, entraînant le spectateur avec lui.

Lorsqu'un train en marche croise un autre train stationnant en gare, les voyageurs du train arrêté sont facilement portés à croire que leurs wagons roulent et que le train qui les croise s'est arrêté.

Tous les aéronautes s'accordent à dire que lorsqu'on monte en ballon, il semble qu'on reste immobile et qu'on voie la Terre fuir sous la nacelle.

Ainsi le témoignage de nos sens ne nous permet de rien préjuger sur le mouvement de la Terre.

73. Preuves de la rotation de la Terre sur elle-même. — Voyons maintenant quelle hypothèse nous devons adopter.

La Terre a environ 40 000 kilomètres de circonférence. Si elle tourne autour d'un axe, un point de son équateur parcourt 40 000 kilomètres en 24 heures ; il a donc une vitesse de 28 kilomètres environ par minute.

Si au contraire ce sont les étoiles qui tournent, comme on ne peut estimer leur distance à moins de 1 000 000 de fois le rayon de la Terre, on voit que ces étoiles décriraient à peu près 460 000 kilomètres par seconde, ce qui est exagéré.

Comme toutes ces étoiles ne sont pas à la même distance de l'axe de rotation, leurs vitesses ne seraient pas les mêmes. Un pareil ensemble de mouvements ne saurait exister, à moins que l'Univers ne forme un tout solide.

Ce n'est pas tout : le Soleil, la Lune et les Planètes doivent présenter des apparences analogues et paraître aussi tourner en vingt-quatre heures, non plus exactement, mais à peu près, autour de la Terre. Il a fallu, pour expliquer tous ces mouvements dans l'hypothèse de l'immobilité de la Terre, que Ptolémée imaginât pour chacun de ces corps une sphère particulière, plus petite, concentrique à la sphère céleste et qui tournerait sous son impulsion avec une vitesse différente.

Ainsi, dans le système fourni par les apparences, les difficultés surgissent de tous côtés.

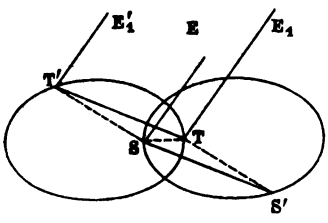
Mais on peut donner du mouvement de la Terre des preuves d'une autre nature : l'augmentation de la pesanteur à la surface du globe à mesure qu'on s'approche des pôles terrestres, et qui est en partie due à la diminution de la force centrifuge ; la déviation du pendule vers l'est, les expériences de Foucault sur le pendule, l'aplatissement de la Terre, la précession des équinoxes, sont autant de preuves convaincantes, mais qu'il est impossible de développer ici.

Pour résumer, nous dirons que :

La Terre tourne sur elle-même en 24 heures sidérales, de l'Ouest à l'Est (sens direct), avec une vitesse constante autour d'un axe incliné à l'horizon de Paris de 48° 50′ 11″.

74. Preuves du mouvement de la Terre autour du Soleil. — Nous venons de voir que la Terre tourne sur elle-même en 24 heures sidérales, et que le Soleil paraît tourner en un an autour de la Terre. Les apparences ne sont en rien modifiées si l'on suppose que la Terre tourne autour d'un axe qui se déplace parallèlement à lui-même et fait en un an un tour complet autour du Soleil.

En effet, supposons d'abord que le Soleil S décrive une ellipse autour de la Terre dans le sens direct, et partons du périgée. Au bout d'un certain temps le Soleil sera en S'.



Si c'est la Terre qui se déplace sur une ellipse symétrique de la première par rapport au milieu de ST, le sens et la vitesse du mouvement étant les mêmes que précédemment, de telle sorte que les droites TS' et ST' soient constamment parallèles et de sens contraires, on voit qu'il n'y a rien de changé pour nous quant aux apparences. En outre, comme les étoiles sont à une distance énorme du système solaire, on verra toujours une même étoile E dans la même direction, que la Terre soit en T ou en T', les droites TE_1 et TE'_1 étant sensiblement parallèles.

Il y a un grand nombre de raisons pour nous faire préférer la seconde hypothèse.

1° Le Soleil est 1 300 000 fois plus gros que la Terre, et il est plus simple de supposer que c'est la Terre qui tourne autour du Soleil.

2° Si on vise une même étoile à six mois d'intervalle, les deux directions que l'on obtient font entre elles un angle très petit, il est vrai, mais dont on a tout de suite l'explication en admettant l'existence de l'orbite terrestre (*).

Nous énoncerons donc la loi suivante :

La Terre décrit en un an dans le sens direct une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers. — Ce mouvement s'effectue conformément à la loi des aires.

75. Parallélisme de l'axe de rotation de la Terre. — Tous les phénomènes observés jusqu'à présent s'expliquent parfaitement avec cette seconde hypothèse.

D'abord, si par un point de l'espace on mène des parallèles à l'axe de rotation de la Terre à chaque instant, le lieu de

(*) Cet angle est le diamètre apparent de l'axe de l'orbite terrestre vu de l'étoile.

ces parallèles est un cône de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan de l'écliptique et dont l'angle générateur est de 23°27'15". Ce cône est décrit à peu près en 26000 ans par une génératrice. On peut donc admettre que, d'une année à une autre, l'axe de rotation de la Terre reste parallèle à lui-même.

76. Solstice et équinoxe. — Le plan de l'*écliptique* est le plan de l'orbite terrestre. La *ligne des équinoxes* est l'intersection de ce plan avec le plan de l'équateur. Cette ligne est transportée parallèlement à elle-même avec l'équateur. Les équinoxes ont lieu lorsqu'elle passe par le centre du Soleil, et les solstices lorsqu'elle est perpendiculaire à la ligne qui joint le centre du Soleil à celui de la Terre.

Détails succincts sur les diverses planètes.

77. Voici d'abord quelques données importantes :

PLANÈTES	Durée des révolutions sidérales en années sidérales	Distances moyennes au soleil	Inclinaisons	Diamètres réels	Durée de la rotation en jours sidéraux j. h m.
Mercure ..	0,24	0,39	7°	0,37	88?
Vénus	0,61	0,72	3° 23'	0,99	225?
La Terre ..	1,00	1,00	0° 0'	1,00	23 56
Mars	1,88	1,52	1° 51'	0,53	24 37
Jupiter ...	11,86	5,20	1° 18'	11,06	9 55
Saturne ..	29,45	9,53	2° 29'	9,30	10 12
Uranus ...	84,00	19,18	0° 46'	4,23	»
Neptune ..	164,76	30,05	1° 47'	3,80	»

78. Loi de Bode. — Il existe entre les distances des planètes au Soleil une relation approchée qui permet de les retenir aisément. Ecrivons 0, et, après, les différents termes d'une progression géométrique de raison 2 et commençant par 3 :

0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, ... ;

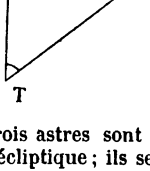
à chaque terme ajoutons 4 :

4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196, 388, ... ;

enfin divisons chaque terme par 10 ; nous avons finalement 0,4 ; 0,7; 1; 1,6; 2,8; 5,2; 10; 19,6; 38,8 ; .....

Comparons ces nombres à ceux du tableau. Ils représentent à peu près les distances moyennes des planètes au Soleil, la distance de la Terre étant prise pour unité. Mais on trouve qu'aucune planète ne correspond au nombre 2,8. Cette lacune fut comblée après Bode, astronome de Berlin et auteur de la suite précédente, par la découverte des planètes télescopiques. Malheureusement le désaccord entre le nombre correspondant à Neptune et la vraie distance ne donne à ce qu'on a appelé la loi de Bode que la valeur d'une règle mnémonique.

79. Définitions. — On appelle *digression* d'une planète sa distance angulaire STP au Soleil.



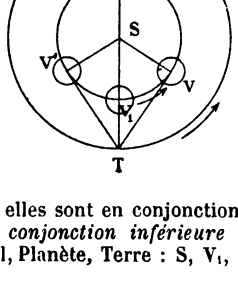
On appelle *élongation* la digression maximum d'une planète.

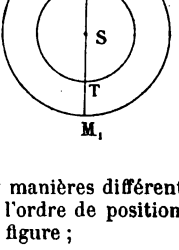
On dit qu'une planète est en *conjonction* avec le Soleil lorsque sa digression est nulle.

Une planète est en *opposition* lorsque son élongation est de 180°.

Dans ces deux cas, les centres des trois astres sont dans un plan perpendiculaire au plan de l'écliptique ; ils seraient rigoureusement en ligne droite si la planète se déplaçait dans le plan de l'écliptique.

Les planètes inférieures ne sont jamais en opposition,





mais elles sont en conjonction de deux manières différentes :

En *conjonction inférieure* lorsque l'ordre de position est Soleil, Planète, Terre : S, V_1, T sur la figure ;

En *conjonction supérieure* lorsque l'ordre de position est Planète, Soleil, Terre : V_2, S, T sur la figure.

Seules les digressions des planètes inférieures présentent un maximum.

On a représenté sur la figure les élongations orientale et occidentale $\widehat{V'TS}$ et $\widehat{STV}$ d'une planète inférieure.

Les planètes supérieures peuvent être en opposition et l'ordre est Planète, Terre, Soleil : M_1, T, S sur la figure.

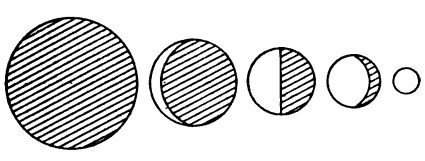
La conjonction supérieure M_2, S, T existe seule.

80. Mercure. — L'élongation de la planète est 29°, de sorte qu'elle est le plus souvent noyée dans l'éclat du Soleil, et qu'on ne peut la voir que rarement à l'œil nu. Quand cela arrive, elle brille au ciel comme une étoile de première grandeur.

En s'attachant à suivre des taches nettes à la surface de la planète, on a pu conclure que la planète tourne sur elle-même dans le temps qu'elle met à faire sa révolution autour du Soleil, soit 88 jours. Par conséquent, c'est toujours le même point de la planète qui a le Soleil à son zénith, et c'est le même hémisphère de Mercure qui est plongé dans l'obscurité. La différence de température entre les deux hémisphères doit être très grande, et s'il y a une atmosphère, il doit y avoir à cause de ce fait une grande circulation de vents.

Mercure n'ayant qu'une assez faible élongation, ses phases ne sont pas très sensibles.

81. Vénus. — L'élongation de Vénus est de 49°. Aussi, en l'examinant avec une lunette, même d'un faible grossissement, on peut apercevoir ses phases, qui sont analogues à



celles de la Lune. En conjonction inférieure elle tourne vers nous sa face obscure et est invisible; si elle se projette sur le Soleil, elle apparaît comme une tache noire très ronde.

En conjonction supérieure son disque est plein et très éclairé, mais il paraît six fois plus petit.

Dans l'intervalle, elle ressemble à la Lune ; tantôt elle est gibbeuse et très petite, tantôt elle est en forme de croissant délié et très grand. Dans ce cas, c'est un des plus beaux astres que l'on puisse observer dans le ciel, et elle brille tellement que dans certaines régions, par exemple en Algérie, on la voit en plein jour (*).

Comme elle ne s'éloigne jamais à plus de 49° du Soleil, elle peut quelquefois précéder le lever du Soleil et d'autres fois suivre son coucher, ce qui explique les deux noms d'*étoile du matin* et d'*étoile du soir* sous lesquels elle est connue. On la désigne communément aussi sous le nom d'*étoile du berger*.

D'après M. Schiaparelli, Vénus tourne sur elle-même dans un temps égal à la durée de sa révolution autour du Soleil, soit 225 jours ; mais M. Flammarion, dans une communication faite en 1894 à l'Académie des Sciences, a cru pouvoir affirmer que cette planète tournait sur elle-même dans le même temps à peu près que la Terre. Ces divergences proviennent de ce que les taches qu'on observe sont dans le voisinage des pôles, et que leur examen est très difficile.

82. Mars. — Mars est la première des planètes supérieures qu'on rencontre en s'éloignant du Soleil. C'est la seule dont on puisse observer les phases facilement. Comme elle n'est jamais en conjonction inférieure, nous en apercevons toujours une partie éclairée, et par conséquent, nous voyons qu'elle ne présente pas la succession complète des phases.

Mars est la plus rapprochée des planètes supérieures. Le plan de son équateur est incliné sur celui de son orbite d'environ 28°48'. Les saisons doivent donc y éprouver à peu près les mêmes variations que sur la Terre. Les valeurs de l'aplatissement trouvées par les divers observateurs sont

(*) Lorsque Galilée découvrit les phases de Vénus, il fut d'abord très embarrassé et n'en saisit pas immédiatement la raison. On raconte cependant qu'on objecta à Kopernik que si son système était vrai, Vénus devait présenter des phases comme la Lune. Kopernik répondit qu'il pensait qu'on les verrait quand on pourrait distinguer la forme de Vénus.

très différentes et dépassent de très peu les erreurs possibles, de sorte qu'il est impossible d'en donner une mesure.

Vue à l'œil nu, la planète Mars apparaît comme une belle étoile rougeâtre.

Vue à la lunette, on aperçoit des teintes sombres un peu verdâtres pendant que la couleur prédominante est le rouge. Ces taches sont permanentes à la surface de la planète, mais des taches blanchâtres apparaissent périodiquement et alternativement aux deux pôles de l'astre, et offrent une analogie frappante avec les glaces de nos régions polaires.

Mars a une atmosphère et de l'eau.

Enfin, M. Asaph Hall a découvert en 1877 deux satellites de Mars. Ils tournent tous les deux dans le sens de la rotation de la planète, mais comme l'un d'eux tourne autour de Mars plus vite que cette planète ne tourne sur elle-même, il paraît rétrograder dans le ciel, et les habitants de Mars, s'il y en a, ont ce spectacle de deux lunes marchant dans le ciel en sens inverse l'une de l'autre.

83. Jupiter. — Jupiter est la plus grosse planète du système solaire. L'intensité de la chaleur et celle de la lumière doivent y être 25 ou 30 fois moindres qu'à la surface de la Terre.

A l'œil nu, Jupiter paraît comme une étoile blanche un peu jaunâtre, très brillante. Son disque vu à la lunette présente des bandes parallèles à l'équateur, alternativement sombres et brillantes. On observe aussi certaines taches noires dont la réapparition périodique a permis de déterminer la rotation de la planète.

Jupiter a cinq satellites qui se déplacent dans des plans très peu inclinés sur le plan de l'orbite de la planète. Ils sont à de très faibles distances de la planète, en sorte qu'ils sont éclipsés à chaque révolution. Comme la Lune pour la Terre, ils présentent toujours la même face à Jupiter.

84. Saturne. — Saturne brille comme une étoile de première grandeur ; c'est, après Jupiter, la plus grosse des planètes.

Son disque est sillonné comme celui de Jupiter de bandes alternativement sombres et lumineuses, parallèles à son équateur. Sa densité moyenne n'est que le $\frac{1}{8}$ de celle de la

Terre. Saturne est la plus légère des planètes et nous ne pouvons pas facilement nous faire une idée de sa constitution superficielle.

Saturne présente une exception unique dans le système solaire. Il est entouré de trois anneaux circulaires larges et minces, concentriques à la planète et dont les bases sont parallèles au plan de l'équateur. Les deux anneaux extérieurs réfléchissent vivement la lumière ; le troisième, plus difficile à voir, est obscur.

85. Uranus. — Les cinq planètes précédentes étaient connues des Anciens. Uranus a été découvert par Herschell en 1781. A l'œil nu, cette planète apparaît comme une étoile de sixième grandeur.

Le diamètre apparent du Soleil est environ 330 fois plus faible pour Uranus que pour nous. On conçoit donc que la chaleur et la lumière y soient extrêmement faibles.

Uranus a quatre satellites qui se meuvent presque dans un même plan, peu incliné sur le plan de l'écliptique ; quand on projette leurs orbites sur l'écliptique, on constate que ces satellites ont un *mouvement rétrograde*, à l'encontre de ce qui se passe pour tous les satellites dont nous avons parlé jusqu'ici.

La planète tourne probablement sur elle-même, et le plan de son équateur doit coïncider avec le plan des orbites des satellites.

86. Neptune. — La découverte de cette planète, en 1846, par l'astronome français Le Verrier, a été une merveilleuse application du calcul à l'astronomie et une éclatante confirmation des lois de la gravitation universelle. Uranus n'obéissait pas complètement aux lois qui régissent le mouvement des planètes, et les perturbations qu'elle subissait dans sa marche n'étaient pas suffisamment expliquées par l'action que Jupiter et Saturne exerçaient sur elle. Le Verrier arriva à démontrer que les mouvements d'Uranus ne pouvaient s'expliquer que par l'existence d'une planète encore inconnue, dont il détermina la position par de savants calculs. Il écrivit à Galle, astronome à Berlin, qu'avec une bonne lunette on devait pouvoir constater l'existence de la planète. Galle braqua aussitôt sa lunette dans la position indiquée : Neptune était au bout.

La chaleur et la lumière ne sont à la surface de cet

planète que la millième partie de ce qu'elles sont à la surface de la Terre.

On n'a pu encore déterminer la rotation de Neptune.

Cette planète possède un satellite qui se meut dans le sens rétrograde.

87. **Petites planètes.** — Depuis le commencement du siècle, les astronomes ont découvert un grand nombre de planètes télescopiques. Elles sont très petites. Le volume de Cérès, la plus grande de toutes, est à peu près le $\frac{1}{1600}$ du volume de la Terre.

On connaît actuellement environ 410 petites planètes. Une trentaine ont été découvertes par la photographie, et c'est à l'aide de ce procédé qu'on en recherche de nouvelles.

D'après Le Verrier, la somme totale de la matière constituant les petites planètes situées entre les distances moyennes 2,20 et 3,16 ne peut dépasser environ le quart de la masse de la Terre.

Telles sont, très succinctement résumées, les différentes particularités des planètes.

88. **Lois de Képler.** — Toutes les planètes, la Terre comprise, obéissent aux trois lois suivantes, connues sous le nom de *lois de Képler :*

1° Chaque planète se meut autour du Soleil dans une orbite plane, et les aires balayées par le rayon vecteur qui joint le centre du Soleil à celui de la planète sont proportionnelles aux temps employés à les balayer.

Cette loi est connue sous le nom de *principe des aires.*

2° La courbe décrite par chaque planète est une ellipse dont le centre de la Terre occupe un des foyers.

3° Les carrés des temps des révolutions sidérales des diverses planètes sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.

89. **Principe de la gravitation universelle.** — Newton a énoncé la loi générale de l'attraction de deux corps dans l'espace sous la forme suivante :

Deux corps s'attirent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance.

Ce principe est la base de la mécanique céleste.

Comètes, étoiles filantes, amas d'étoiles, nébuleuses.

90. Comètes. — Les planètes ne sont pas les seuls éléments du système solaire. On voit assez souvent apparaître des astres très grands, dont le volume est comparable à celui du Soleil, plutôt qu'à celui des planètes. Ils s'approchent du Soleil en décrivant des orbites très allongées, et s'en éloignent de plus en plus pour disparaître presque tous à nos yeux et ne plus y revenir. Ce sont les *comètes*.

91. Aspects d'une comète. — Lorsqu'on découvre une comète encore fort éloignée du Soleil, elle apparaît comme une tache ronde d'un très faible éclat, offrant cette particularité que les plus petites étoiles se voient presque sans affaiblissement à travers sa nébulosité, et qu'elles ne subissent aucune réfraction appréciable. On peut donc assimiler cette nébulosité à une atmosphère, mais d'une extrême ténuité. Au bout de quelques jours, on voit apparaître au centre un noyau brillant qui possède une masse et une densité certainement très supérieures à celles de l'enveloppe nébuleuse. A mesure que la comète se rapproche du Soleil, elle se déforme. Le noyau prend une position de plus en plus excentrique et la comète se met à fuser dans la direction du rayon vecteur qui joint le noyau au centre du Soleil, mais à l'opposé du Soleil. La comète continuant encore à se rapprocher du Soleil, fuse aux deux bouts à la fois, par l'extension de la queue à l'opposé du Soleil, et de l'autre côté, par la formation d'aigrettes dont la matière marche d'abord vers le Soleil, puis s'arrête et finit par rebrousser chemin pour aller rejoindre les matériaux de la queue. L'allongement observé est souvent énorme; il y a des queues de 30, 40, 60 millions de lieues de longueur et plus.

Les queues des comètes prennent les formes les plus variées; les unes sont droites, d'autres sont recourbées et s'épanouissent en éventail; quelques comètes ont plusieurs queues.

Cette matière disséminée par les comètes cesse évidemment de faire corps avec elles; mais elle ne se déplace pas au hasard dans l'espace. Chaque molécule obéit aux lois de Képler, ainsi que le noyau.

Quand une comète a passé au périhélie, des phénomènes

analogues se reproduisent, mais en sens inverse ; l'éclat des comètes diminue rapidement à mesure qu'elles s'éloignent du Soleil; bientôt elles deviennent invisibles à l'œil nu, puis disparaissent, échappant au télescope le plus puissant.

92. Comètes périodiques. — On connaît quelques comètes périodiques, qui apparaissent à intervalles réguliers.

La plus ancienne est connue sous le nom de comète de *Halley*. Sa période est de 75 ans. On doit l'apercevoir de nouveau en 1910.

La comète d'*Encke* accomplit sa révolution en 3 ans et 4 mois.

La comète de *Faye* revient au bout de 7 ans et demi.

La comète de Biéla, observée à son retour en 1846, s'était dédoublée pendant sa période d'invisibilité, de sorte qu'on vit deux comètes semblables, très voisines l'une de l'autre et décrivant à peu près l'orbite assignée à la comète de Biéla. Les deux fragments reparurent encore le 22 et le 23 septembre 1852. A partir de cette époque, on ne les a plus revus. Mais en 1872 et en 1878, aux époques problables de leur passage, on observa de magnifiques pluies d'étoiles filantes.

Il est probable que les comètes se désagrègent sous l'action du Soleil et que toutes les comètes périodiques sont destinées à avoir un jour ou l'autre le sort de la comète de Biéla.

93. Étoiles filantes. — Quelquefois , par une nuit sereine et sans lune, un point lumineux se montre tout-à-coup dans le ciel ; il se meut avec une grande rapidité, puis diminue d'éclat et disparaît au bout de deux ou trois secondes.

Le météore observé a reçu le nom d'*étoile filante*.

On pense qu'il existe dans les espaces interplanétaires certains corpuscules circulant à la manière des planètes. Quand ils arrivent près de la Terre, ils pénètrent dans l'atmosphère, rencontrent de sa part une certaine résistance à leur mouvement, d'où production de chaleur et de lumière.

Quelques essaims d'étoiles filantes paraissent suivre les orbites d'anciennes comètes, comme nous l'avons vu pour la comète de Biéla. Il est donc possible qu'elles résultent d'une désagrégation de comètes poussée à sa dernière limite.

94. Aérolithes, Bolides. — Quand un corpuscule ne fait

que traverser l'atmosphère terrestre, pour continuer sa marche après, il donne lieu à une étoile filante. S'il rencontre la Terre avant d'avoir brûlé complètement, il s'y enfonce plus ou moins profondément.

C'est là l'origine des *aérolithes*. Il est à remarquer qu'on ne trouve dans ces corps que des matériaux terrestres.

Quelquefois, les plus gros de ces corpuscules qui s'approchent le plus de la Terre et qui s'enflamment dans l'atmosphère, éclatent avant d'avoir touché le sol, ce sont des *bolides*. Un des plus beaux bolides qu'on ait observés est celui qui a passé au-dessus de Madrid en janvier 1896.

Les bolides peuvent être visibles en plein jour.

95. Étoiles doubles. — On désigne ainsi deux étoiles très voisines sur la sphère céleste et formant un groupe binaire, de telle sorte que chacune d'elles tourne autour de l'autre.

On connaît plus de 500 étoiles doubles.

96. Étoiles variables. — Toutes les étoiles n'ont pas un éclat constant ; la plus célèbre des étoiles variables est *Algol* ou β de Persée, dont l'éclat varie durant 11 jours de la deuxième à la quatrième grandeur.

97. Amas d'étoiles. — Les Pléiades forment un *amas d'étoiles*. A l'œil nu, on peut distinguer six étoiles, mais avec une lunette on aperçoit un grand nombre d'étoiles réparties en deux amas voisins.

On peut citer aussi les amas d'étoiles de Persée et d'Hercule.

98. Nébuleuses. — Les *nébuleuses* sont des masses de lumière diffuse, ressemblant à des nuages, d'une étendue plus ou moins grande.

Quelques nébuleuses sont *résolubles*, c'est-à-dire composées d'étoiles très serrées, qu'on parvient à apercevoir avec de puissantes lunettes.

Les nébuleuses non résolubles paraissent être constituées par un fluide lumineux. D'après M. Faye, les nébuleuses non résolubles sont des lambeaux de matière cosmique, c'est-à-dire des lambeaux d'une matière continue, homogène et douée d'un éclat propre, qu'on retrouve à l'origine de tous les astres.

Nous devons penser que les étoiles constituant les néb-

leuses résolubles sont à des distances de notre système solaire telles, qu'il faudrait sans doute compter par milliers d'années le temps que la lumière met à les parcourir pour venir à nous. Et la vitesse de la lumière est pourtant de 300 000 kilomètres par seconde!

Les formes des nébuleuses sont très variées; le plus souvent elles paraissent sphériques, mais on en trouve d'allongées et quelques-unes d'annulaires.

On pense que la *voie lactée*, cette zone brillante irrégulière qui divise la sphère céleste en deux parties à peu près égales, est une nébuleuse annulaire. Il est probable que le système solaire se trouve à l'intérieur de l'anneau, et qu'un observateur placé très loin verrait la voie lactée se projeter sur la sphère céleste comme une nébuleuse annulaire.

TABLE

Sphère céleste. — Principales constellations. — Mouvement diurne. — Ascension droite et déclinaison 1

Forme sphérique de la Terre. — Détermination de la longitude et de la latitude. — Rayon de la Terre 20

Soleil. — Mouvement apparent sur la sphère céleste. — Écliptique ; constellations zodiacales. — Saisons 29

La Lune. — Ses phases 36

Éclipses de Lune et de Soleil. 41

Description générale du système solaire. — Planètes et leurs satellites. — Système de Kopernik. — Détails succincts sur les diverses planètes. 46

Comètes, étoiles filantes, amas d'étoiles, nébuleuses. 58

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet.

EXTRAIT
DU
CATALOGUE DE LA LIBRAIRIE NONY et Cie
Rue des Écoles, 17, à Paris

ANTOMARI (X.). — *Cours de Mécanique* à l'usage des candidats à Saint-Cyr. — In-8° (1895). . . . . 3 fr. 50

BARBARIN (P.). — *Recueil de Calculs logarithmiques*, à l'usage des candidats aux baccalauréats d'ordre scientifique et aux écoles du gouvernement. — In-4° . . . . . 3 fr. 50

BASIN (J.). — *Leçons de Chimie*, à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire. — Volumes in-12. *Métalloïdes*, broché, 2 fr. 50 ; relié, 3 fr. — *Métaux*, broché, 2 fr. ; relié, 2 fr. 50. — *Métalloïdes et Métaux*, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, broché, 4 fr. 50 ; relié, 5 fr.

BOUTILLIER (A.). — *Eléments de Sténographie Prévost-Delaunay*. — In-12 . . . . . 0 fr. 50

Cartes topographiques (Recueil de) pour les candidats à Saint-Cyr. — Un atlas gr. in-8°, 3e édition . . . . . 3 fr. 50

Cet atlas renferme vingt petites cartes au 1/20000, quadrillées et de difficulté graduée, et 24 petites feuilles de papier à dessin, quadrillées aussi de façons différentes, pour la reproduction. Les cartes données aux concours de 1893 à 1895 figurent dans l'atlas.

CARVALLO (E.). — *Traité de mécanique* à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, des aspirants au baccalauréat classique (2e série), au baccalauréat moderne (3e série) et des candidats à l'Institut agronomique. — In-8° . . . . 2 fr. 50

CHARRUIT (N.). — *Problèmes et épures de géométrie descriptive*, à l'usage des candidats aux écoles de Saint-Cyr et Navale, et des aspirants aux baccalauréats. Texte et planches : 2 vol. in-8°, ensemble . . . . . 5 fr.

CROUZET (E.). — *Eléments de la topographie*, précédés de notions sur la construction des cartes, à l'usage des candidats à Saint-Cyr. — 3e édition. In-8°, avec planches . . . . . 2 fr.

Décret du 28 janvier 1892 relatif au nouveau mode d'attribution des emplois publics, avec les programmes des examens et concours. — In-8° . . . . . 1 fr.

DESSENON (E.). — *Cours de Trigonométrie rectiligne* à l'usage des aspirants aux baccalauréats et des candidats aux écoles du gouvernement. — In-8°, 2e édition . . . . . 3 fr.

DEVILLE (V.). — *Manuel de Géographie commerciale*, à l'usage des candidats aux écoles supérieures de commerce. — 2 vol. in-8° cart. . . . . 10 fr.

DUBOIS (A.). — *Les dispensés commerciaux*. Application de la loi nouvelle aux élèves des écoles supérieures de commerce. — In-12, 3e édition . . . . . 0 fr. 50

Formulaire [mathématiques, physique, chimie] à l'usage des aspirants aux baccalauréats d'ordre scientifique, des candidats aux

écoles du gouvernement et des élèves des écoles normales. — 7e édition (remaniée surtout en chimie et en électricité). — Un joli petit volume de 72 pages, format de poche 22 × 12. Broché, 1 fr. Cart. toile. . . . . 1 fr. 50

GAUSSERON (B.-H.). — *Le Thème anglais aux examens du baccalauréat et aux concours d'admission aux écoles spéciales.* — 2 vol. in-8°, 4 fr. 50. — On vend séparément : textes, 3 fr. ; traductions. . . . . 1 fr. 50

GAUSSERON (B.-H.). — *La Version anglaise* aux examens du baccalauréat et aux concours d'admission aux écoles spéciales. — 2 vol. in-8° . . . . . (Sous presse.)

GIR (Th.). — *Les problèmes d'arithmétique résolus par la méthode algébrique.* Leçons élémentaires d'algèbre. — In-12. 2 fr. 50

GRIGNON (A.). — *Cours élémentaire de Cosmographie* à l'usage des élèves des classes de Rhétorique. — In-8° . . . 1 fr. 50

L'ouvrage de M. Grignon a été bien accueilli ; il est strictement conforme au programme officiel, qui, en ne consacrant que 10 leçons par an à l'enseignement de la Cosmographie dans les classes de Rhétorique, a marqué le caractère tout à fait élémentaire qu'il convenait de donner à cet enseignement.

GUIOT (H.) et PILLET (J.). — *Le dessin de paysage étudié d'après nature*, à l'usage des candidats à Saint-Cyr. — Album gr. in-8°, avec 60 colonnes de texte, 46 figures théoriques, 80 motifs divers et 20 grandes planches parmi lesquelles les dessins donnés ces dernières années au concours de Saint-Cyr. 4e édit. . 3 fr. 50

HUMBERT (E.). — *Traité d'Arithmétique*, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, des aspirants aux baccalauréats et des candidats à l'Institut agronomique. — In-8°. . . 5 fr.

Instruction ministérielle du 14 mars 1894 *sur l'aptitude physique au service militaire* et sur l'aptitude particulière aux différentes armes. — In-12, de 92 pages. . . . . 0 fr. 50

JORAN (J.). — *Biographies d'hommes illustres* : hommes de guerre, diplomates, savants et artistes, suivies d'un abrégé des littératures allemande et anglaise depuis la fin du XVIIIe siècle, à l'usage des candidats à Saint-Cyr. — Gr. in-12, 2e édit. 2 fr.

JORAN (J.). — *Recueil de compositions françaises* sur des sujets tirés de l'histoire moderne, à l'usage des candidats à Saint-Cyr. — In-8°, 2e édition. . . . . 4 fr.

LANG (E.-B.). — *Le thème allemand* aux examens du baccalauréat et aux concours d'admission aux écoles spéciales. — 2 vol. in-8°, 5 fr. — On vend séparément : textes, 3 fr. ; traductions . . . . . 2 fr.

LANG (E.-B.). — *La version allemande* aux examens du baccalauréat et aux concours d'admission aux écoles spéciales. — 2 vol. in-8°, 4 fr. 50. — On vend séparément : textes, 3 fr. ; traductions . . . . . 1 fr. 50

LHOMME (F.) et Édouard PETIT. — *La composition française* aux

examens du baccalauréat moderne et aux concours d'admission aux écoles spéciales. — 2e édition. Un vol. in-8° de 521 pages, renfermant 1646 sujets, un grand nombre de plans et de développements.

Cet ouvrage convient aussi aux élèves de Rhétorique.

Loi militaire (Nouvelle) et décret du 23 novembre 1889 sur les dispenses. — In-12, tenu au courant de toutes les modifications. 0 fr. 30

LORBER (Th.). — *Recueil de Manuscrits allemands* à l'usage des candidats à Saint-Cyr. — In-12, relié, 2e édition. . . . 3 fr.

LORIDAN (Abbé J.). — *Problèmes de baccalauréat ès lettres.* Problèmes ; solutions ; conseils. — Un vol. in-12, de 244 pages ; broché, 1 fr. 60 ; relié toile. . . . . 2 fr.

MACÉ DE LÉPINAY (A.). — *Compléments d'Algèbre et notions de Géométrie analytique*, à l'usage des candidats à Saint-Cyr et des élèves de mathématiques élémentaires se destinant à la classe de mathématiques spéciales. — In-8°, 3e édition. 4 fr. 50

Manuel de préparation aux concours d'entrée des écoles supérieures de commerce, contenant le développement des programmes officiels. — 2 vol. in-8° reliés. . . . . 10 fr.

1er volume : Mathématiques, physique et chimie, par M. Drincourt. — 2e volume, géographie, histoire, par M. Deville ; commerce et comptabilité, par MM. Léautey, Guilbaut, Hurbin-Lefebvre.

NITHARD (R.). — La nouvelle *loi militaire* et les *dispensés des écoles nationales d'agriculture et de l'institut agronomique.* — In-12, avec modèles . . . . . 0 fr. 50

Plan d'études et Programmes de l'enseignement secondaire classique. — In-12 . . . . . 1 fr.

Plan d'études et programmes de l'enseignement secondaire moderne. — In-12 . . . . . 1 fr.

Plan d'études et Programmes de la classe de Mathématiques élémentaires et de la classe supérieure de Mathématiques élémentaires . . . . . 0 fr. 50

Plan d'études et Programmes de l'enseignement secondaire des jeunes filles. . . . . . 1 fr.

REBIÈRE (Alph.). — *Mathématiques et Mathématiciens.* Pensées et curiosités. — 2e édition. Un vol. in-8°, de 566 pages. 5 fr.

TABLE DES MATIÈRES : Morceaux choisis et pensées. — Variétés et anecdotes. — Paradoxes et singularités. — Problèmes célèbres et classiques. — Problèmes frivoles et humoristiques. — Notes bibliographiques. — Index alphabétique.

REBIÈRE (Alph.). — *Les Femmes dans la Science.* — In-8°. 1 fr. 50

Dans cet ouvrage, l'auteur analyse d'une façon très attrayante la vie et les œuvres des six mathématiciennes les plus célèbres : Hypatie, Emilie du Châtelet, Marie Agnesi, Sophie Germain, Mary Somerville, Sophie Kowalevski.

Relations entre les éléments d'un triangle. Recueil de 273 formules avec leurs démonstrations. — In-8° . . . . 2 fr. 50

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par MM. E. Humbert

et G. Papelier, avec la collaboration de MM. N. Charruit, E. Dessenon, Ch. Rivière, A. Tartinville, H. Vuibert.

In-4° de 24 pages, paraissant mensuellement. Les abonnements sont annuels et partent d'octobre. France, 8 fr. Etranger, 9 fr.

La *Revue de Mathématiques spéciales* publie, entre autres choses, les sujets de concours pour l'admission aux écoles Normale, Polytechnique, Centrale, des Ponts et Chaussées, des Mines, des Mines de Saint-Étienne, Navale; les sujets donnés au concours général de mathématiques spéciales, à l'agrégation, aux bourses de licence, etc.

Tous ces sujets d'examen et de concours sont résolus (mathématiques, physique, chimie, épures).

La *Revue* est divisée en deux parties : la première est plus particulièrement destinée aux candidats aux écoles Normale et Polytechnique; la seconde, aux candidats aux autres écoles. Les énoncés relatifs à ces deux groupes d'élèves sont séparés; mais, bien entendu, les meilleurs élèves du second groupe et les nouveaux du premier groupe ont souvent intérêt à suivre aussi la partie qui ne leur est pas spécialement destinée.

TARTINVILLE (A.). — *Cours d'arithmétique*, à l'usage des candidats aux baccalauréats et aux écoles spéciales. — In-8°, 2e édition . . . . . 5 fr. »

VUIBERT (H.) et BOUANT (E.). — *Problèmes de baccalauréat*. 2e édition, fort vol. in-8°, 8 fr. — On vend séparément : 1re partie : Mathématiques, renfermant 680 problèmes avec les solutions du plus grand nombre, 5 fr. — 2e partie : Physique et Chimie, 3 fr. 50.

PROGRAMMES

Certificat d'études exigé des candidats aux grades de pharmacien de 2e classe et de chirurgien-dentiste . . . . . 0 fr. 20
Baccalauréat de l'enseignement secondaire classique . . 0 fr. 30
Baccalauréat de l'enseignement secondaire moderne . . . 0 fr. 30
Certificat d'études physiques, chimiques et naturelles . . 0 fr. 30
Facultés et écoles de médecine . . . . . 0 fr. 30
Pharmacie, herboristerie . . . . . 0 fr. 30
Facultés de droit . . . . . 0 fr. 30
Licences et doctorat ès lettres . . . . . 0 fr. 30
Licences et doctorat ès sciences . . . . . 0 fr. 60
Bourses de licence, d'agrégation, d'études (sciences, lettres, médecine, pharmacie, muséum) . . . . . 0 fr. 40
Agrégations de l'enseignement secondaire et certificat d'aptitude aux fonctions de l'enseignement . . . . . 0 fr. 30
Agrégation des facultés . . . . . 0 fr. 30

Écoles spéciales.

Administration militaire (Ecole d') . . . . . 0 fr. 50
Agriculture (Ecoles nationales d') . . . . . 0 fr. 30
Architecture (Ecole spéciale d') . . . . . 0 fr. 30
Architecture (Programme détaillé de l'enseignement de l'école spéciale d') . . . . . 1 fr. »
Arts et Métiers (Ecoles nationales d') . . . . . 0 fr. 30

Athènes et de Rome (Ecoles françaises d'). . . . . 0 fr. 20
Beaux-Arts de Paris (Ecole nationale des). . . . . 0 fr. 50
Beaux-Arts des départements (Ecoles des). . . . . 0 fr. 30
Centrale des Arts et Manufactures (Ecole). . . . . 0 fr. 30
Centrale lyonnaise (Ecole). . . . . 0 fr. 30
Chartes (Ecole des). . . . . 0 fr. 20
Cluny (Ecole nationale d'ouvriers et de contremaîtres de). 0 fr. 30
Coloniale (Ecole). . . . . 0 fr. 30
Commerciale de Paris (Ecole) . . . . . 0 fr. 30
Conservatoire national de musique et de déclamation . . 0 fr. 40
Dentaire de Paris (Ecole) . . . . . 0 fr. 30
Hydrographie de Dieppe (Ecole d') . . . . . 0 fr. 30
Institut agronomique et école des Haras. . . . . 0 fr. 30
Institut industriel du Nord de la France. . . . . 0 fr. 30
Langues orientales vivantes (Ecole des) . . . . . 0 fr. 20
Mécaniciens de la flotte (Apprentis et élèves). . . . . 0 fr. 30
Mécaniciens pour la marine (Ecole d'apprentis), au Havre. 0 fr. 30
Mines (Ecole nationale supérieure des) . . . . . 0 fr. 50
Mines de Saint-Etienne (Ecole des) . . . . . 0 fr. 30
Navale (Ecole) . . . . . 0 fr. 30
Normale supérieure (Ecole) . . . . . 0 fr. 20
— de Sèvres (Ecole). . . . . 0 fr. 25
— de Fontenay-aux-Roses et de Saint-Cloud (Ecoles) 0 fr. 25
Notariat de Nantes (Ecole de) . . . . . 0 fr. 20
Notariat de Paris (Ecole de) . . . . . 0 fr. 20
Physique et Chimie industrielles (Ecole de) . . . . . 0 fr. 40
Polytechnique (Ecole) . . . . . 0 fr. 30
Ponts et chaussées (Ecole des). . . . . 0 fr. 50
Postes et télégraphes (Ecole professionnelle supérieure des) et emplois dans l'Administration . . . . . 0 fr. 50
Pratique de commerce et de comptabilité (Ecole) . . . . 0 fr. 50
Prytanée militaire de la Flèche. . . . . 0 fr. 30
Saint-Cyr (Ecole de) . . . . . 0 fr. 30
Saint-Maixent (Ecole de) . . . . . 0 fr. 30
Santé de la marine (Ecole du service de) . . . . . 0 fr. 30
Santé militaire (Ecole du service de). — Pharmacie militaire. — Val-de-Grâce. . . . . 0 fr. 30
Saumur (Ecole de) . . . . . 0 fr. 50
Supérieure de guerre (Ecole). . . . . 0 fr. 30
Supérieure d'industrie de Bordeaux (Ecole) . . . . . 0 fr. 30
Vétérinaires (Ecoles nationales). . . . . 0 fr. 30

Supérieure de commerce :

De Bordeaux (Programme des conditions d'admission à l'école) 0 fr. 30
De Bordeaux (Programme de l'enseignement à l'école) . 0 fr. 50
Du Havre (Ecole). . . . . 0 fr. 30
De Lille (Ecole) . . . . . 0 fr. 30

De Lyon (Programme des conditions d'admission à l'école) 0 fr. 30
De Lyon (Programme de l'enseignement normal à l'école) 0 fr. 50
De Marseille (Ecole) (section du commerce) . . . . . 0 fr. 30
De Marseille (Ecole) (section de la marine marchande) . 0 fr. 75
De Paris (Programme des conditions d'admission à l'école) 0 fr. 30
De Paris (Ecole) (Programmes officiels de l'enseignement) 0 fr. 75
De Paris (Ecole) (Règlements généraux et règlement intérieur) 0 fr. 50
De Rouen (Programme d'admission). . . . . 0 fr. 30
Hautes études commerciales (Programme des conditions d'admission). . . . . 0 fr. 30
Hautes études commerciales (Programmes officiels de l'enseignement à l'école des). . . . . 1 fr. »
Hautes études commerciales (Règlements de l'école des) 0 fr. 50
Institut commercial (Programme des conditions d'admission) 0 fr. 30
Institut commercial (Règlements intérieurs) . . . . . 0 fr. 50
Institut commercial (Programmes de l'enseignement) . . 0 fr. 75

Divers.

Administration des finances (ministère, enregistrement, contributions, douanes, manufactures de l'Etat). . . . . 0 fr. 30
Auditorat près le Conseil d'Etat et la Cour des Comptes. 0 fr. 20
Certificat d'aptitude au professorat industriel et au professorat commercial . . . . . 0 fr. 40
Commissariat de surveillance administrative des chemins de fer 0 fr. 30
Conditions d'admission dans le corps du commissariat de la marine (Ecole d'administration de la marine. — Aides commissaires) . . . . . 0 fr. 30
Conditions d'admission et de l'avancement dans le personnel administratif secondaire de la marine (personnel des manutentions, des directions de travaux, des comptables des matières, des agents du commissariat). . . . . 0 fr. 50
Conditions d'obtention des bourses des lycées et collèges de garçons et de jeunes filles et des bourses de séjour à l'étranger. 0 fr. 25
Conditions d'obtention du diplôme d'élève de la marine marchande, du brevet de capitaine de la marine marchande et du brevet de maître au cabotage . . . . . 0 fr. 50
Conditions d'admission aux bourses commerciales de séjour à l'étranger et programmes des matières du concours. . 0 fr. 30
Connaissances exigées pour l'admission aux grades de premier-maître mécanicien théorique, second-maître mécanicien théorique, quartier-maître mécanicien théorique . . . . . 0 fr. 50
Officiers ministériels . . . . . 0 fr. 20

SUJETS DE CONCOURS ET D'EXAMENS

Baccalauréats.

Annales du baccalauréat de l'enseignement classique (épreuves *scientifiques*). — In-12. Chaque année. . . . . 2 fr. 75

Licences.

Annales de la licence ès sciences (mathématiques, physiques, naturelles). — In-12. Chacune des années 1888 et suivantes 3 fr.

Bourses de licence ès sciences mathématiques. — Concours de 1880 à 1895. . . . . 2 fr. 50

Bourses de licence ès sciences physiques. — Concours de 1880 à 1895 . . . . . 2 fr. 50

Bourses de licence ès sciences naturelles. — Concours de 1880 à 1895. . . . . 2 fr.

Agrégations.

Annales de l'agrégation des sciences mathématiques. — In-12. — Années 1876 a 1888, 6 fr. 50. Chacune des années 1889 et suivantes . . . . . 0 fr. 75

Annales de l'agrégation des sciences physiques. — Chacune des années 1889 et suivantes . . . . . 0 fr. 75

Annales de l'agrégation des sciences naturelles. — Chacune des années 1889 et suivantes . . . . . 0 fr. 75

Agrégations de philosophie, des lettres, d'histoire et de géographie, de grammaire. — Concours de 1890 à 1895. — In-8° . . . . . (*en préparation*)

Agrégations d'allemand et d'anglais. — Concours de 1890 à 1895. — In-8° . . . . . (*en préparation*)

Certificats d'aptitude.

Certificat d'aptitude au professorat des classes élémentaires de l'enseignement secondaire. — Années 1890 à 1895. — In-8° . . . . . 1 fr. 25

Certificat d'aptitude au professorat des écoles normales d'instituteurs (lettres), depuis l'origine jusqu'en 1895. — In-8° . . . . . 1 fr. 75

Certificat d'aptitude au professorat des écoles normales d'instituteurs (sciences), depuis l'origine jusqu'en 1895. — In-8° . . . . . 1 fr. 75

Certificat d'aptitude au professorat des écoles normales d'institutrices (lettres), depuis l'origine jusqu'en 1895. — In-8° . . . . . 1 fr. 75

Certificat d'aptitude au professorat des écoles normales d'institutrices (sciences), depuis l'origine jusqu'en 1895. — In-8° . . . . . 1 fr. 75

Écoles spéciales.

Administration de la marine (Ecole d'). — Concours de 1871 à 1895 . . . . . 2 fr. 50
Agriculture (Ecoles nationales d') Concours de 1889 à 1895 1 fr. 75
Arts et Métiers (Ecoles d'). — Concours de 1874 à 1895 (texte et planches). . . . . 6 fr. 50
Centrale (Ecole). — Concours de 1880 à 1895 (non compris les dessins) . . . . . 6 fr.
Centrale (Ecole). — Dessins d'architecture, de machine et d'ornement, conc. de 1890 à 1895, 12 planches format raisin. 5 fr.
Cluny (Ecole de). — Concours de 1891 à 1895. . . . 2 fr. 50
Hautes études commerciales, Supérieures de commerce (les sept écoles) et *Institut commercial*. — Concours de 1881 à 1895 . . . . . 5 fr.
Institut agronomique. — Concours de 1888 à 1895. . 2 fr. 75
Militaire d'infanterie à Saint-Maixent (Ecole). — Concours de 1890 à 1894 . . . . . 1 fr. 50
Mines de Saint-Etienne (Ecole des). — Concours de 1885 a 1895 . . . . . 4 fr.
Navale (Ecole). — Concours de 1885 à 1895 . . . . . 5 fr.
Normale supérieure (Ecole). — Section des lettres. Concours de 1891 à 1895. . . . . 1 fr.
Normale supérieure (Ecole). — Section des sciences. — Concours de 1891 à 1895. . . . . 1 fr.
Polytechnique (Ecole). — Concours de 1880 à 1895 . . . 5 fr.
Polytechnique (Ecole). — Papier Whatman avec le trait des dessins à laver (conc. de 1890 à 1894). — Les 5 feuilles. 1 fr. 25
Ponts et Chaussées (Ecole des). — Cours préparatoires. Concours de 1884 à 1895 . . . . . 4 fr.
Ponts et Chaussees (Ecole des). — Elèves externes. Concours de 1884 à 1895 . . . . . 4 fr.
Postes et Télégraphes (Ecole professionnelle supérieure des), 1re section. — Concours de 1888 à 1891. . . . . 1 fr. 60
Postes et Télégraphes (Ecole professionnelle supérieure des), 2e section (section des élèves ingénieurs). — Concours de 1891, suivi d'un aperçu des questions posées aux examens oraux 0 fr. 50
Saint-Cyr (Ecole de). — Concours de 1880 à 1895. . . . 5 fr.
Vétérinaires (Ecoles). — Concours de 1887 à 1895 . . 1 fr. 75

Pour les autres sujets de concours ou d'examen, consulter le catalogue complet.

ANNUAIRE DE LA JEUNESSE

Par H. VUIBERT

Instruction — Écoles spéciales — Carrières et Professions

Un vol. in-12 de 1000 p., br. 3 fr., cart. 4 fr., rel. 5 fr.

Cette publication, comme l'indique son titre, est continuellement réimprimée et mise au courant des innombrables changements qui surviennent chaque année dans tout ce qui touche à l'instruction, aux écoles spéciales, aux carrières, au service militaire, etc.

La première partie : INSTRUCTION, servira à guider les jeunes gens dans tous les actes de la vie scolaire, à quelque degré d'instruction qu'ils veuillent s'élever.

Dans la seconde partie : ECOLES SPÉCIALES, consacrée aussi bien aux petites écoles qu'aux grandes, l'auteur laisse absolument de côté le point de vue historique, pour ne s'attacher qu'à l'organisation actuelle. Il insiste sur les moyens de préparation à chaque école et sur la nature des débouchés qui s'offrent à la sortie.

La troisième partie de l'ouvrage : CARRIÈRES ET PROFESSIONS, est en quelque sorte une application des deux autres, puisque son objet est de montrer quel est le meilleur parti à tirer de l'instruction acquise.

Arithmétique à l'usage des classes de Rhétorique et de Troisième, par A. GRÉVY, professeur agrégé au lycée Condorcet. — Un vol. in-12, cart. toile. . . . . 2 fr.

Biographies d'hommes illustres : HOMMES D'ÉTAT, DIPLOMATES, SAVANTS ET ARTISTES, suivies d'un abrégé des littératures allemande et anglaise depuis la fin du XVIIIe siècle, à l'usage des candidats au baccalauréat, par J. JORAN, professeur au collège Stanislas, à Sainte-Barbe et à l'école Lacordaire. — Un vol. grand in-12, 2e édit. 2 fr.

Compositions françaises (Recueil de) sur des sujets historiques, à l'usage des candidats à Saint-Cyr et au baccalauréat, par J. JORAN. — Un vol. in-8°, 2e édition. 4 fr.

Cours de cosmographie à l'usage des élèves de Rhétorique, par A. GRIGNON. — Un vol. . . . . 1 fr. 50

Programmes pour tous les examens, toutes les écoles, tous les concours. (Consulter le Catalogue ou l'*Annuaire de la Jeunesse.*)

Recueil de sujets de compositions données au concours d'admission à l'école normale supérieure (section des lettres). — Concours de 1891 à 1896 . . . . . 1 fr.

Sujets d'examens et de concours. (Consulter le Catalogue.)

MANUEL DU BACCALAURÉAT

DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE CLASSIQUE

CLASSE DE RHÉTORIQUE

LITT
HIST
GÉO

PHIL
vo
On
PHYS
vo
HIST
et
toi

MATI
Hu
rel
PHYS
vol
PHIL
On

Le
contr
math
embr
sable
bonnes études ; les problèmes qu'ils y trouvent sont de nature à les intéresser vivement et à leur faire acquérir le goût des mathématiques. Le journal présente également beaucoup d'intérêt pour les élèves des classes de lettres depuis qu[illegible] nouveaux programmes obligent ceux d'entre eux qui veulent p[illegible] ires a une préparation personnelle [illegible]

Prix de l'abonnement [illegible] Étranger, 6 fr. — L'abonneme[illegible] bus les

(A quelque époque de [illegible] numéros parus depu[illegible]